MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa
Datum: 120330 kl. 13.15 - 15.00
Telefonvakt: Oscar Marmon, 0709-414755

MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer
Deltentamen 1

Erhållen poäng på denna deltenta får ersätta poängen på uppgift 1 på tentamen tills kursen ges nästa läsår. Resultat meddelas via PingPong.
Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

---

1. (a) Till en funktion f har man följande värdetabell: (2p)

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	-3.6	0	1.6	1.8	1.2	0.4	0

Skissa grafen till f och finn ett närmevärde till $f(5.7)$ med linjär interpolering.
Lösning och svar:

$$f(5.7) \approx f(5) + \frac{f(6) - f(5)}{6-5}(5.7 - 5) = 1.2 + (0.4 - 1.2) \cdot 0.7 = 0.64.$$

(b) Beräkna (1p)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3+4}.$$

Lösning:

$$\frac{x^2+1}{x^3+4} = \frac{x^2(1+1/x^2)}{x^3(1+4/x^3)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+1/x^2}{1+4/x^3} \to 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0, \text{ då } x \to \infty.$$

Svar: 0.

(c) Bestäm ekvationen för tangenten till grafen till $f(x) = x + \frac{2}{x}$ i den punkt där $x = 2$. (3p)
Lösning: Vi har $f(2) = 3$, så punkten ifråga är $(2, 3)$. Vidare är $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$, så $f'(2) = \frac{1}{2}$ vilket är tangentens riktingskoefficient. Tangentens ekvation är alltså $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$, eller efter omskrivning $y = \frac{1}{2}x + 2$.
Svar: $y = \frac{1}{2}x + 2$.

(d) Bestäm, med hjälp av intervallhalveringsmetoden, ett intervall av längd högst 0.25 som innehåller en rot till ekvationen (2p)

$$x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$$

Lösning: Låt $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1$. $f(0) = 1 > 0$ och $f(1) = -1 < 0$, så enligt satsen om mellanliggande värde finns en rot i intervallet $[0, 1]$. Vi testar i intervallets mittpunkt – $f(0.5) = 0.625 > 0$, alltså finns en rot i intervallet $[0.5, 1]$. Ny mittpunkt är 0.75. Då $f(0.75) = -0.08 < 0$, finns en rot i intervallet $[0.5, 0.75]$.
Svar: (Ett av flera möjliga) $[0.5, 0.75]$.

Lycka till!
Oscar M

Formelblad för MVE340, 11/12

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\quad$ $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\quad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Linjär interpolation

$a < c < b$, $f(a)$, $f(b)$ kända: $\quad f(c) \approx f(a) + \dfrac{c-a}{b-a}(f(b) - f(a))$

Deriveringsregler

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ $\quad$ $(kf(x))' = kf'(x)$ $\quad$ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ $\quad$ $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Några elementära funktioners derivator

$D(x^p) = px^{p-1}$ $\quad$ $D(e^x) = e^x$ $\quad$ $D(e^{cx}) = ce^{cx}$ $\quad$ $D(a^x) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $D(\sin x) = \cos x$ $\quad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\quad$ $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

Tangentens ekvation: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $\quad$ Normalens ekvation: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$: Newtons metod

Startvärde x_0, beräkna: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa med x_1 som nytt x_0, upprepa tills $|f(x_1)|$ är litet.

Integralkatalog

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt \qquad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där s_1 och s_2 är lösningar ($s_1 \neq s_2$) till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2 + cs + k = 0$, (m, c, k konstanter). Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $x(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $x(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$

Vektor(kryss)produkt

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)\end{aligned}$$