

MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer
Deltentamen 3

Erhållen poäng på denna deltentamen får ersätta poängen på uppgift 3 på tentamen tills kursen ges nästa läsår. Deltentamen rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via PingPong.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

3. (a) Funktionen $y(t) = t e^{3t}$ uppfyller en av de tre differentialekvationerna nedan. Avgör vilken. (Motivera ditt svar.) (2p)

i. $y'(t) - y(t) = e^{3t}$ ii. $t \cdot y'(t) = 3y(t)$ iii. $y'(t) - 3y(t) = e^{3t}$

- (b) Då dagsljuset tränger ner i en sjö avtar ljusets intensitet $I(x)$ med djupet x under vattenytan enligt Lamberts lag: (1p)

$$\frac{dI}{dx} = -kI$$

där k är en positiv konstant. Bestäm funktionen $I(x)$.

- (c) Antag i (b) att ljusintensiteten är $I(0) = I_0$ vid ytan och $I(1) = 0.4 I_0$ på 1 meters djup. Bestäm $I(x)$. (2p)

- (d) Lös differentialekvationen (3p)

$$y''(t) + 25y(t) = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Lycka till!
Oscar M

Formelblad för MVE340, 11/12

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Linjär interpolation

$$a < c < b, f(a), f(b) \text{ kända: } f(c) \approx f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$$

Deriveringsregler

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (kf(x))' = kf'(x) \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Några elementära funktioners derivator

$$D(x^p) = px^{p-1} \quad D(e^x) = e^x \quad D(e^{cx}) = ce^{cx} \quad D(a^x) = a^x \ln a$$

$$D(\ln x) = \frac{1}{x} \quad D(\sin x) = \cos x \quad D(\cos x) = -\sin x \quad D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

$$\text{Tangentens ekvation: } y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \text{Normalens ekvation: } y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$: Newtons metod

Startvärde x_0 , beräkna: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa enligt $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt$$

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där s_1 och s_2 är lösningar ($s_1 \neq s_2$) till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2 + cs + k = 0$. Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $x(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $x(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$

Vektor(kryss)produkt

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$