Lösningsförslag till tentamen
MVE340 Matematik för Sjöingenjörer del B

2011-05-26 8.30–12.30

Examinator: Carl-Henrik Fant, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Carl-Henrik Fant , telefon: 772 5878

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 25 poäng på godkändtdelen, eller minst 5 poäng på varje uppgift. Erhållen poäng på deltentor detta läsår får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på tentamen tills kursen ges nästa läsår.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkänddelen

1. f är funktionen som ges av $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$

(a) Beräkna gränsvärdena $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^3}$ och $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^3}$ (2p)

Lösning och svar:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{f(2)}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{12x}{x^3} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = 2$$

(b) Bestäm ekvationer för tangenten och normalen till grafen till f i den punkt på grafen där $x = 2$. (4p)

Lösning: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12,\ f(2) = 3,\ f'(2) = 24$

Tangentens ekvation är $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ alltså: $y - 3 = 24(x - 2)$ kan skrivas om till $y = 24x - 45$

Normalens ekvation är $y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2)$ alltså: $y - 3 = -\frac{1}{24}(x - 2)$ kan skrivas om till $x + 24y = 70$

Svar: Tangentens ekvation: $y = 24x - 45$ Normalens ekvation: $x + 24y = 70$

(c) Bestäm ett intervall av längd högst $\frac{1}{2}$ som innehåller en positiv rot till $f(x) = 0$. (2p)

Lösning: $f(1) = -8 < 0,\ f(2) = 3 > 0 \Rightarrow$ minst en rot i intervallet $[1, 2]$. $f(1.5) = \frac{27}{4} + \frac{27}{4} - 19 = -5.5 \Rightarrow$ minst en rot i intervallet $[1.5, 2]$

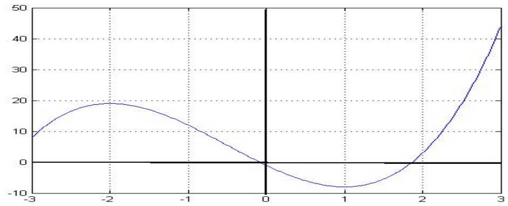
Svar: Minst en rot i intervallet $[1.5, 2]$

2. (a) Rita grafen till $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ på intervallet $[-3, 3]$. Ange funktionens lokala extrempunkter (max och min) samt största och minsta värde på intervallet. (4p)

Lösning: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}, x_1 = -2, x_2 = 1$. Detta ger följande tabell:

x	-3		-2		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	$\nearrow$	19	$\searrow$	-8	$\nearrow$	44

Tabellen ger grunden för följande graf till funktionen.



Svar: Funktionen har ett lokalt maximum i punkten $(-2, 19)$ ett lokalt minimum i punkten $(1, -8)$. Funktionens största värde på intervallet är 44, det minsta är -8.

(b) Bestäm en positiv rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ (samma som i uppgift 1). Du kan vara nöjd då $|f(x_0)| < 0.1$ (1p)

Lösning: Med startvärde $x_0 = 1.5$ (se uppg 1c) och sedan $x = x - (2x^3 + 3x^2 - 12x - 1)/(6x^2 + 6x - 12)$ erhålls följande värden

x	1.5	2.0238	1.8790	1.8637
$f(x)$	-5.5	3.5800	0.3116	0.0033

Svar: Den positiva roten är 1.86. (alla svar mellan 1.859 och 1.868 är OK under förutsättning att Newtons metod använts minst en gång.)

(c) Beräkna arean mellan grafen till $f(x) = 4x - x^2 - 3$ och x-axeln. (3p)

Lösning: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm 1$. Grafen till $f(x)$ skär x-axeln i punkterna $(1, 0)$ och $(3, 0)$. Mellan punkterna ligger grafen över x-axeln.

Arean ges därför av integralen $\displaystyle\int_1^3 (f(x)-0)dx = \int_1^3 (4x-x^2-3)dx = \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 3x\right)\Big]_1^3 =$
$\displaystyle (18 - 9 - 9) - (2 - \frac{1}{3} - 3) = \frac{4}{3}$

Svar: Arean är $\frac{4}{3}$ (a.e.)

3. (a) Lös differentialekvationen $x''(t) + 169x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$. (4p)

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är $s^2 + 169 = 0$,. Rötter $s_{1,2} = \pm i\sqrt{169} = i \pm 13$.

Differentialekvationens allmänna lösning är $x(t) = A\cos(13t) + B\sin(13t)$. Begynnelsevillkoret $x(0) = 0$ ger $A\cos(0) + B\sin(0) = 0$, $A = 0$.

Begynnelsevillkoret $x'(0) = 2$ ger $13B\cos(0) = 2$, $B = \frac{2}{13}$.

Svar: $x(t) = \frac{2}{13}\sin(13t)$

(b) Lös differentialekvationen $x''(t) + 10x'(t) + 169x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$. (4p)

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är $s^2 + 10s + 169 = 0$,. Rötter $s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 169} = i \pm 12$

Differentialekvationens allmänna lösning är $x(t) = e^{-5t}\left(A\cos(12t) + B\sin(12t)\right)$. Begynnelsevillkoret $x(0) = 0$ ger $e^0\left(A\cos(0) + B\sin(0)\right) = 0$, $A = 0$ och $x(t) = Be^{-5t}\sin(12t)$.
Derivatan av en produkt ger $x'(t) = B(-5e^{-5t}\sin(12t) + 12e^{-5t}\cos(12t)), \quad x(0) = 12B$. Begynnelsevillkoret $x'(0) = 2$ ger $12B\cos(0) = 2$, $B = \frac{2}{12}$.

Svar: $x(t) = \frac{2}{12}e^{-5t}\sin(12t)$

4. (a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 6 \\ x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 8 \end{cases}$$

Lösning:

Med systemets totalmatris får man:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & 2 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].
$$

Svar:

$$
\begin{cases} x &= \frac{12}{5} \\ y &= -\frac{2}{5} \\ z &= 0 \end{cases}
$$

(b) Avgör om några av vektorerna $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$ och $(3, -3, 1)$ är ortogonala (vinkelräta mot varandra). (2p)

Lösning: Beräkna skalärprodukterna: $(1, 2, 3)\bullet(2, -1, 1) = 3$, $(1, 2, 3)\bullet(3, -3, 1) = 0$, $(2, -1, 1)\bullet(3, -3, 1) = 10$

Svar: $(1, 2, 3)$ och $(3, -3, 1)$ är ortogonala.

(c) Bestäm en vektor som är vinkelrät mot vektorerna $(2, 1, -2)$ och $(0, -1, 1)$ (2p)

Lösning: Vektorprodukten av två vektorer är ortogonal mot båda vektorerna.

$$
(2, 1, -2) \times (0, -1, 1) = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -2, -2)
$$

Svar: Vektorn $(-1, -2, -2)$ är ortogonal mot de givna vektorerna.

(d) Ange en ekvation för planet som går genom punkten $(2, 1, 0)$ och är ortogonalt mot vektorn $(2, 2, 2)$. (2p)

Lösning: Vektorn $\vec{n} = (2, 2, 2)$ är alltså en normal till planet. Planets ekvation ges då av $\vec{n} \bullet (x - 2, y - 1, z - 0) = 0$, alltså $2(x - 2)?2(y - 1) + 2z = 0$. Detta förenklas till:

Svar: $x + y + z = 3$

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x^2-4}{(x^3-2x+2)^2}dx$. (3p)

Lösning: Substitution: $t = x^3 - 2x + 2$

Svar:

(b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2x)dx$. (3p)

Lösning: Partiell integration två gånger. derivera bort x^2.

Svar:

7. En cylinder har volymen $16\pi\ cm^3$. Bestäm cylinderns radie så att cylinders totala area (den buktiga ytan och de båda plana ytornas area tillsammans) är så liten som möjligt. (6p)

Lösning: Arean är $2\pi rh + 2\pi r^2$ där samband mellan r och h ges av $V = \pi r^2 h = 16$

Svar: $r = 2$

8. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller linjen (6p)

$$\begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= -1 + t \\ z &= 2 - 2t \end{cases}$$

och är parallellt med linjen

$$\begin{cases} x &= 2 + 3t \\ y &= -1 + t \\ z &= 1 + 3t \end{cases}.$$

Skär de två linjerna varandra?

Lösning: Vektorprodukten av de två linjernas riktningsvektorer $(2, 1, -2)$ och $(3, 1, 3)$ ger normal till planet. Detta tillsammans med punkten $(1. -1, 2)$ på linjen i planet ger planets ekvation. Den andra linjen är parallell med planet. Antingen ligger den helt i planet,i så fall skär linjerna varandra, eller så skär den inte planet alls, då skär inte heller linjerna varandra. Man undersöker lätt om punkten $(2, -1, 1)$ ligger i planet. Om den gör det så skär linjerna varandra, annars inte.

Svar:

Carl-Henrik Fant