Lösningsförslag till tentamen
MVE340 Matematik för Sjöingenjörer del 2

2011-08-26 8.30–12.30

Examinator: Carl-Henrik Fant, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Carl-Henrik Fant , telefon: 772 5878

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 25 poäng på godkäntdelen, eller minst 5 poäng på varje uppgift. Erhållen poäng på deltentor eller tentamen våren 2011 får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på denna tentamen.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas via e-post, efter detta sker granskning måndag och torsdag 9-13, MV:s expedition, Lindholmen.
Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkänddelen

1. (a) Till en funktion f har man vidstående värdetabell. Beräkna närmevärden till $f(-3.6)$ och $f(3.6)$. (2p)

x	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	3.8	1.6	0.6	0.2	-0.2	-1.2	-3.4

Lösning och svar: $f(-3.6) \approx f(-4) + \frac{-3.6-(-4)}{-2-(-4)}(f(-2) - f(-4)) = 3.8 - 0.2 \cdot 2.2 = 3.36$

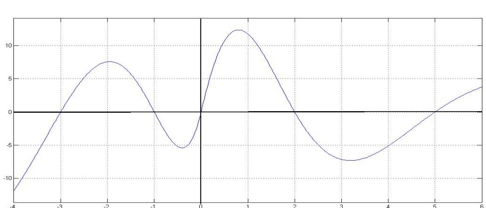
$f(3.6) \approx f(2) + \frac{3.6-2}{4-2}(f(4) - f(2)) = 0.2 - 0.8 \cdot 0.4 = -0.12$

(b) Bestäm skärningspunkten mellan x-axeln och tangenten till grafen till $f(x) = x^4 - 4x^2 - 13x + 29$ i den punkt på grafen där $x = 2$. (4p)

Lösning: $f(x) = x^4 - 4x^2 - 13x + 29 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 8x - 13, \quad f(2) = 3, \quad f'(2) = 3.$
Tangentens ekvation: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. Tangenten skär x-axeln då $y = 0$ och $x = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 1$

Svar: Tangenten skär x-axeln i punkten $(1, 0)$.

(c) Vidstående graf visar **derivatan** $f'(x)$. Ange i vilka intervall funktionen $f(x)$ är växande respektive avtagande.

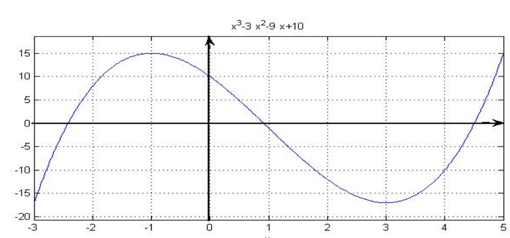


Lösning och svar: Funktionen är växande då derivatan är positiv och avtagande då derivatan är negativ. Alltså $f(x)$ är växande i intervallen $[-3, -1]$, $[0, 2]$ och $[5, 6]$. Den är avtagande i intervallen $[-4, -3]$, $[-1, 0]$ och $[2, 5]$. (2p)

2. (a) Rita grafen till $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ på intervallet $[-3, 5]$. Ange funktionens lokala extrempunkter (max och min) samt största och minsta värde på intervallet. (4p)

Lösning: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$ vilket ger följande tabell och graf:

x	-3		-1		3		5
$f'(x)$	36	+	0	-	0	+	36
$f(x)$	-17	↗	15	↘	-17	↗	15



Svar: Funktionen har lokalt maximum i punkterna $(-1, 15)$ och $(5, 15)$. Den har lokalt minimum i punkterna $(-3, -17)$ och $(3, -17)$. Största värdet är 15, minsta värdet är -17.

(b) Bestäm en rot i intervallet $(0, 1)$ till ekvationen $x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$ med Newtons metod. Du kan vara nöjd då $|f(x_0)| < 0.01$ (2p)

Lösning: $f(0) = 10$, $f(1) = -1$. Väljer startpunkten $x_0 = 1$. Newtons metod ger, då $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{-12} = 0.9167$. $f(x_1) = -0.0006$. Alltså är den sökta roten 0.9167.

Svar: Roten är 0.9167.

(c) Beräkna integralen $\int_{-3}^{0} (x^3 - 3x^2 - 9x + 10)dx$. (2p)

Lösning: $\int_{-3}^{0} (x^3 - 3x^2 - 9x + 10)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} - 9\frac{x^2}{2} + 10x\right]_{-3}^{0} =$
$0 - \left(\frac{(-3)^4}{4} - 3\frac{(-3)^3}{3} - 9\frac{(-3)^2}{2} + 10(-3)\right) = -\frac{81}{4} - 27 + \frac{81}{2} + 30 = \frac{93}{4}$

Svar: $\int_{-3}^{0} (x^3 - 3x^2 - 9x + 10)dx = \frac{93}{4}$

3. (a) Lös differentialekvationen $x''(t) + 169x(t) = 0, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = -3.$ (4p)

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är $s^2 + 169 = 0$,. Rötter $s_{1,2} = \pm i\sqrt{169} = i \pm 13$.

Differentialekvationens allmänna lösning är $x(t) = A\cos(13t) + B\sin(13t)$.

Derivering ger $x'(t) = -13A\sin(13t) + 13B\cos(13t)$.

Begynnelsevillkoret $x(0) = 3$ ger $A\cos(0) + B\sin(0) = 3$, $A = 3$.

Begynnelsevillkoret $x'(0) = -3$ ger $13B\cos(0) = -3$, $B = -\frac{3}{13}$.

Svar: $x(t) = 3\cos(13t) - \frac{3}{13}\sin(13t)$

(b) Lös differentialekvationen $x''(t) + 10x'(t) + 169x(t) = 0, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = -3.$ (4p)

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är $s^2 + 10s + 169 = 0$,. Rötter $s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 169} = i \pm 12$

Differentialekvationens allmänna lösning är $x(t) = e^{-5t}\left(A\cos(12t) + B\sin(12t)\right)$.

Derivatan av en produkt ger $x'(t) = -5e^{-5t}\left(A\cos(12t) + B\sin(12t)\right) + e^{-5t}\left(-12A\sin(12t) + 12B\cos(12t)\right)$

Begynnelsevillkoret $x(0) = 3$ ger $e^0\left(A\cos(0) + B\sin(0)\right) = 3$ alltså $A = 3$.

Begynnelsevillkoret $x'(0) = -3$ ger $-5A + 12B = -3$, $12B = 5A - 3 = 12$, $B = 1$.

Svar: $x(t) = e^{-5t}\left(3\cos(12t) + \sin(12t)\right)$

4. (a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

Lösning: Med systemets totalmatris får man:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Svar: Lösningen är: $x = 2, \quad y = -3 \quad z = 1$

(b) Ange en ekvation för linjen som går genom punkterna $(1, -1, -2)$ och $(2, 1, 1)$. (2p)

Lösning: En riktningsvektor för linjen är $\mathbf{u} = (2, 1, 1) - (1, -1, -2) = (1, 2, 3)$. **Svar:** Linjens ekvation är

$$\begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= -1 + 2t \\ z &= -2 + 3t \end{cases}$$

(c) Avgör om linjen genom punkterna $(1, -1, -2)$ och $(2, 1, 1)$ och linjen genom punkterna $(1, -1, -2)$ och $(4, -4, -1)$ skär varandra under rät vinkel. (2p)

Lösning: Linjerna skär varandra i punkten $(1, -1, -2)$. Den andra linjens riktningsvektor är $\mathbf{v} = (4, -4, -1) - (1, -1, -2) = (3, -3, 1)$.

Skalärprodukten av de två linjernas riktningsvektorer är $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (1, 2, 3) \bullet (3, -3, 1) = 3 - 6 + 3 = 0$

Svar: Ja, linjerna skär varandra under rät vinkel.

(d) Bestäm en vektor som är vinkelrät mot vektorerna $(1, 2, 3)$ och $(1, 0, -1)$ (2p)

Lösning: Vektorprodukten $(1, 2, 3) \times (1, 0, -1) = (-2, 4, -2)$ är vinkelrät mot de två gina vektorerna.

Svar: $(-2, 4, -2)$ är en vektor vinkelrät mot de givna. Alla vektorer $t(1, -2, 1)$ duger. Även nollvektorn, men det var inte meningen.

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^3}dx.$ (3p)

Lösning: Gör substitutionen $t = x^2 - 2x + 2,\ dt = (2x-2)dx,\ x = 2 \Rightarrow t = 2,\ x = 1 \Rightarrow t = 1$. D erhålls

$$\int_1^2 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^3}dx = \int_1^2 \frac{1}{2t^3}dt = \left[-\frac{1}{4t^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{16}.$$

Svar: $\frac{3}{16}$

(b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 e^{3x} dx.$ (3p)

Lösning: Upprepade partiella integrationer ger: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3}x^2 e^{3x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} x e^{3x} dx =$

$$\frac{1}{3}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 e^{\frac{3\pi}{2}} - 0\right) - \left(\left[\frac{2}{9}xe^{3x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{9} e^{3x} dx\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 e^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{2}{9}\frac{\pi}{2}e^{\frac{3\pi}{2}} + \left[\frac{2}{27}e^{3x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 e^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{2}{9}\frac{\pi}{2}e^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{2}{27}\left(e^{\frac{3\pi}{2}} - 1\right) = \frac{1}{108}e^{\frac{3\pi}{2}}\left(9\pi^2 - 12\pi + 8\right) - \frac{2}{27}.$$

Svar: $\displaystyle\frac{1}{108}e^{\frac{3\pi}{2}}\left(9\pi^2 - 12\pi + 8\right) - \frac{2}{27}$

6. En låda har kvadratisk botten och saknar lock. Den har volymen 32 cm^3. Bestäm lådans mått så att sidornas och bottenytans area tillsammans är så liten som möjligt. (6p)

Lösning: Om lådans bottenyta har sidan s och höjden är h så är lådans totala area: $A = s^2 + 4sh$. Lådans volym är $V = s^2h$. Då $V = 32$ är $h = \frac{32}{s^2}$.

Alltså är $A(s) = s^2 + 4s\frac{32}{s^2} = s^2 + \frac{128}{s}$.

Vi söker minsta värdet för A.

$A'(s) = 2s - \frac{128}{s^2}$.

$A'(s) = 0 \Rightarrow 2s = \frac{128}{s^2} \Rightarrow s^3 = 64 \Rightarrow s = 4$.

Vi får följande tabell:

s	0		4		∞
$A'(s)$		-	0	+	
$A(s)$	∞	$\searrow$	48	$\nearrow$	∞

Av tabellen framgår att minsta arean erhålls för $s = 4$. Då är $h = \frac{32}{16} = 2$

Svar: Lådans botten har sidan 4 cm, lådans höjd är 2 cm.

7. Avgör om det finns något plan som innehåller linjerna med ekvationer (6p)

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}.$$

Bestäm i så fall en ekvation för det planet.

Lösning: Riktningsvektorer för de två linjerna är $\mathbf{u} = (2, -1, 2)$ och $\mathbf{v} = (3, 1, -3)$. Dessa är inte parallella. De två linjerna ligger därför i ett plan om och endast om de skär varandra. En skärningspunkt ges av lösning till ekvationssystemet:

$$\begin{cases} -3 + 2t = 2 + 3s \\ 3 - t = 3 + s \\ -1 + 2t = -2 - 3s \end{cases}$$

Ekvationssystemet har lösningen $t = 1,\ s = -1$, som ger skärningspunkten $(-1, 2, 1)$.

De två linjerna ligger alltså i planet genom $(-1, 2, 1)$ med normalvektor $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (2, -1, 2)\times(3, 1, -3) = (1, 12, 5)$. En ekvation för detta plan är $1(x - (-1)) + 12(y - 2) + 5(z - 1) = 0$

Svar: De två linjerna ligger i planet med ekvation $x + 12y + 5z = 28$.

Carl-Henrik Fant