Tentamen
MVE340 Matematik för Sjöingenjörer del 2

2013-01-15 8.30–12.30

Examinator: Oscar Marmon , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt och rond: Urban Larsson , telefon: 0734-407926

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 5 poäng på varje uppgift, eller minst 25 poäng på hela godkänddelen. Erhållen poäng på årets deltentor eller ordinarie tentamen får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på denna tentamen.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 16/1. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Information om granskning meddelas via e-post då tentan är rättad.
Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkänddelen

1. (a) Beräkna (2p)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3-2x^2+1}{3x^3+4x+2}$$

(b) Låt $f(x)=\sqrt{x+4}$. Bestäm ekvationen för tangenten till f:s graf i den punkt där $x=0$. Rita denna tangent i samma figur som grafen till f på lämpligt intervall. (4p)

(c) Beräkna $h'(0)$, där $h(x)=(2x+1)^{10}$. (2p)

2. (a) Skissa grafen till $f(x)=9x^2-5x^3$ på intervallet $[-1,2]$. Ange alla lokala maxima och minima samt funktionens största och minsta värde på intervallet. (3p)

(b) Bestäm en approximativ rot till ekvationen $f(x)=0$ med Newtons metod då $f(x)=4x^3-3x^2+x-4$. Du kan vara nöjd då $|f(x_k)|<0.05$. (2p)

(c) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos 2x\,dx$. *(Tips: använd partiell integrering.)* (3p)

3. (a) Bestäm talet a så att funktionen $f(t)=at^2+1$ är en lösning till differentialekvationen $(t^2-1)y''=2y$. (2p)

(b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'-5y=0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0)=-2$. (2p)

(c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''+16y=0$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0)=1$, $y'(0)=2$. (4p)

4. (a) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x - 3y - z = 7 \\ 4x + 2y + 3z = -7 \\ -x + 4y - z = -7 \end{cases}$ (2p)

(b) Bestäm en vektor som är ortogonal mot (vinkelrät) mot båda vektorerna $\mathbf{u}=(1,1,3)$ och $\mathbf{v}=(3,-1,-1)$. (2p)

(c) Ange en ekvation för planet som går genom punkten $(-3,3,-1)$ och är ortogonalt mot vektorn $(2,3,-4)$ (2p)

(d) Bestäm en ekvation (på parameterform) för den linje som utgör skärningen mellan planen $x+2y+3z=0$ och $x+6y-z=8$. (2p)

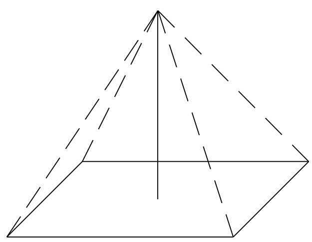
Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$. (3p)

(b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. (3p)

6. En 12 meter lång järnstång ska kapas i 5 delar av vilka 4 är lika långa. De lika långa delarna ska utgöra den kvadratiska basen för ett tält, den återstående ska resas i mitten vinkelrätt mot basytan. Tältet spänns upp i pyramidform så som figuren visar. Hur långa ska delarna vara för att ge maximal volym av tältet? (Volymen av pyramiden är basarean gånger höjden dividerat med 3.) (6p)



7. Den takt med vilken ett istäcke växer till vid konstant temperatur antas vara omvänt proportionell mot isens tjocklek. Låt $f(t)$ vara isens tjocklek (cm) vid tiden t (i timmar). Skriv upp en differentialekvation som f löser, och bestäm f om isens tjocklek är 1 cm vid tiden $t = 0$ och 2 cm efter 1 timme. (6p)

Lycka till!
Oscar Marmon

Formelblad för MVE340, 11/12

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Linjär interpolation

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\qquad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$

Deriveringsregler

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ $\qquad$ $(kf(x))' = kf'(x)$ $\qquad$ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ $\qquad$ $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Några elementära funktioners derivator

$D(x^p) = px^{p-1}$ $\qquad$ $D(e^x) = e^x$ $\qquad$ $D(e^{cx}) = ce^{cx}$ $\qquad$ $D(a^x) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $D(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\qquad$ $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

Tangentens ekvation: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$: Newtons metod

Startvärde x_0, beräkna: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa enligt $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog

$\int x^a dx$	$=$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$	$\int \dfrac{1}{x} dx$	$=$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\int \sin x dx$	$=$	$-\cos x + C$	$\int \cos x dx$	$=$	$\sin x + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$	$=$	$\tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx$	$=$	$-\cot x + C$
$\int e^x dx$	$=$	$e^x + C$	$\int a^x dx$	$=$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$
$\int f(g(x))g'(x) dx$	$=$	$\int f(t) dt$	$\int f(x)g(x) dx$	$=$	$F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där s_1 och s_2 är lösningar $(s_1 \neq s_2)$ till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2 + cs + k = 0$. Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $x(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $x(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$

Vektor(kryss)produkt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) \\
&= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}
$$