Tentamen
MVE340 Matematik för Sjöingenjörer del 2

2013-01-15 8.30–12.30

Examinator: Oscar Marmon , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt och rond: ??? ??? , telefon: ??? ???

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 5 poäng på varje uppgift, eller minst 25 poäng på hela godkänd-delen. Erhållen poäng på årets deltentor eller ordinarie tentamen får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på denna tentamen.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 16/1. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Information om granskning meddelas via e-post då tentan är rättad.
Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkänddelen

1. (a) Beräkna (2p)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3-2x^2+1}{3x^3+4x+2}$$

Lösning:

$$\frac{5x^3-2x^2+1}{3x^3+4x+2} = \frac{x^3(5-2/x+1/x^3)}{x^3(3+4/x^2+2/x^3)} = \frac{5-2/x+1/x^3}{3+4/x^2+2/x^3} \to \frac{5-0+0}{3+0+0} = \frac{5}{3},$$

då $x \to -\infty$.
Svar: $\frac{5}{3}$.

(b) Låt $f(x) = \sqrt{x+4}$. Bestäm ekvationen för tangenten till f:s graf i den punkt där $x = 0$. Rita denna tangent i samma figur som grafen till f på lämpligt intervall. (4p)
Lösning och svar: Eftersom $f(0) = 2$, så är den sökta punkten $(0, 2)$. Derivatan är

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}},$$

så $f'(0) = \frac{1}{4}$, vilket är tangentens riktningskoefficient. Tangentens ekvation är alltså

$$y-2 = \frac{1}{4}(x-0) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{4}x+2.$$

(c) Beräkna $h'(0)$, där $h(x) = (2x+1)^{10}$. (2p)
Lösning: Eftersom $h(x) = f(g(x))$, där $f(z) = z^{10}$ och $g(x) = 2x+1$, ger kedjeregeln att

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 10(2x+1)^9 \cdot 2.$$

Insättning ger $h'(0) = 20$.
Svar: $h'(0) = 20$.

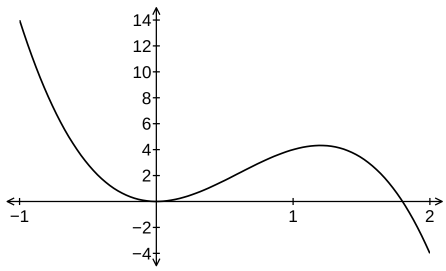
2. (a) Skissa grafen till $f(x) = 9x^2-5x^3$ på intervallet $[-1, 2]$. Ange alla lokala maxima och minima samt funktionens största och minsta värde på intervallet. (3p)
Lösning: Vi deriverar: $f'(x) = 18x-15x^2$. Kritiska punkter: $f'(x) = 3x(6-5x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 6/5$. Vi gör en teckentabell

x		0		$6/5$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

som avslöjar att f har ett lokalt minimum då $x = 0$ och ett lokalt maximum då $x = 6/5 = 1.2$. Vi har även ett lokalt maximum i intervallets vänstra ändpunkt och ett lokalt minimum i den högra ändpunkten. Vi gör en liten värdetabell

x	-1	0	1.2	2
$f(x)$	14	0	4.32	-4

och skissar grafen



Svar: Lokala maxima: $f(-1) = 14$, $f(6/5) = 108/25 = 4.32$, lokala minima $f(0) = 0$, $f(2) = -4$. Största värde: 14. Minsta värde: -4.

(b) Bestäm en approximativ rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 4$. Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 0.05$. (2p)

Lösning: Vi har $f(1) = -2 < 0$ och $f(2) = 18 > 0$, så ekvationen har en rot i intervallet $[1, 2]$. Vi väljer startvärdet $x_0 = 1$. Vi behöver också räkna ut derivatan: $f'(x) = 12x^2 - 6x + 1$. Newtons metod ger

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.2857, \qquad f(x_1) = 0.828,$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.2226, \qquad f(x_1) = 0.0485.$$

Svar: 1.2226

(c) Beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx$. *(Tips: använd partiell integrering.)* (3p)

Lösning:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx = \left[x \cdot \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{2} \, dx$$
$$= \left[x \cdot \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Svar: $-\frac{1}{2}$.

3. (a) Bestäm talet a så att funktionen $f(t) = at^2 + 1$ är en lösning till differentialekvationen $(t^2 - 1)y'' = 2y$. (2p)

Lösning: Om $y = f(t) = at^2 + 1$, så är $y' = 2at$ och $y'' = 2a$. Vänsterledet i differentialekvationen blir då $(t^2 - 1)y'' = (t^2 - 1)2a = 2at^2 - 2a$, och högerledet blir $2y = 2(at^2 + 1) = 2at^2 + 2$. Villkoret för att differentialekvationen ska vara uppfylld blir alltså

$$2at^2 - 2a = 2at^2 + 2 \;\Leftrightarrow\; -2a = 2 \;\Leftrightarrow\; a = -1.$$

Svar: $a = -1$.

(b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - 5y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = -2$. (2p)

Lösning: Den allmänna lösningen är $y(t) = Ce^{5t}$. Begynnelsevillkoret ger $Ce^{5 \cdot 0} = -2 \Leftrightarrow C = -2$.

Svar: $y(t) = -2e^{5t}$.

(c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 16y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (4p)

Lösning: Karakteristiska ekvationen $s^2 + 16 = 0$ har rötterna $s_{1,2} = \pm 4i$, så den allmänna lösningen blir

$$y(t) = A\cos 4t + B\sin 4t, \quad \text{där } A \text{ och } B \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

Då är $y'(t) = -4A\sin 4t + 4B\cos 4t$, så begynnelsevillkoren ger

$$y(0) = A = 1, \qquad\qquad y'(0) = 4B = 2 \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

Svar: $y(t) = \cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t$.

4. (a) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x - 3y - z = 7 \\ 4x + 2y + 3z = -7 \\ -x + 4y - z = -7 \end{cases}$ (2p)

Lösning: Gausseliminering ger:

$$\begin{cases} x - 3y - z = 7 & {}^{-4}\ {}^{1} \\ 4x + 2y + 3z = -7 \\ -x + 4y - z = -7 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - 3y - z = 7 \\ 14y + 7z = -35 & \cdot\frac{1}{7} \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - 3y - z = 7 \\ 2y + z = -5 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - 3y - z = 7 \\ y - 2z = 0 & {}^{-2} \\ 2y + z = -5 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - 3y - z = 7 \\ y - 2z = 0 \\ 5z = -5 \end{cases}$$

Tredje raden ger $z = -1$. Återsubstitution ger $y = 2z = -2$, $x = 7 + 3y + z = 0$.
Svar:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

(b) Bestäm en vektor som är ortogonal mot (vinkelrät) mot båda vektorerna $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$ och $\mathbf{v} = (3, -1, -1)$. (2p)

Lösning: En sådan vektor ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= \big(1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3, -(1 \cdot (-1) - 3 \cdot 3), 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1\big) = (2, 10, -4).\end{aligned}$$

Svar: $(2, 10, -4)$ är ett möjligt svar. Ett enklare svar är $(1, 5, -2)$ som ju är parallell med föregående vektor.

(c) Ange en ekvation för planet som går genom punkten $(-3, 3, -1)$ och är ortogonalt mot vektorn $(2, 3, -4)$ (2p)

Lösning: Vektorn $(2, 3, -4)$ är alltså en normalvektor för planet, så planets ekvation är $2x + 3y - 4z = D$, där konstanten D beräknas genom att sätta in den givna punkten:

$$2 \cdot (-3) + 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = D \Longrightarrow D = 7.$$

Svar: $2x + 3y - 4z = 7$

(d) Bestäm en ekvation (på parameterform) för den linje som utgör skärningen mellan planen $x + 2y + 3z = 0$ och $x + 6y - z = 8$. (2p)

Lösning: Vi löser det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 & \xrightarrow{-4} \\ x + 6y - z = 8 & \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad\;\; 4y - 4z = 8 & \cdot\frac{1}{3} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad\;\; y - z = 2 \end{cases}$$

Sätt $z = t$, då blir $y = 2 + z = 2 + t$ och $x = -2y - 3z = -4 - 5t$.

Svar:

$$\begin{cases} x = -4 - 5t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$$

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx.$ (3p)

Lösning och svar:

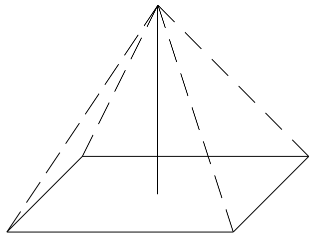
$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} e^x = t \\ e^x\, dx = dt \end{array} \right\} = \int_1^e \frac{1}{t+1}\, dt \quad = \big[\ln(t+1)\big]_1^e = \ln(e+1) - \ln 2.$$

(b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx.$ (3p)

Lösning och svar:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \left\{ \text{ Integrera } \tfrac{1}{x^2}, \text{ derivera } \ln x \right\} = \left[-\frac{1}{x} \ln x\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$
$$= -\frac{1}{e} + 0 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

6. En 12 meter lång järnstång ska kapas i 5 delar av vilka 4 är lika långa. De lika långa delarna ska utgöra den kvadratiska basen för ett tält, den återstående ska resas i mitten vinkelrätt mot basytan. Tältet spänns upp i pyramidform så som figuren visar. Hur långa ska delarna vara för att ge maximal volym av tältet? (Volymen av pyramiden är basarean gånger höjden dividerat med 3.) (6p)



Lösning: Kalla längden (i meter) av de fyra lika långa delarna för x. Höjden i pyramiden är då $12 - 4x$, så volymen kan skrivas

$$V(x) = \frac{x^2(12-4x)}{3} = 4x^2 - \frac{4}{3}x^3.$$

Vi söker maximum av $V(x)$ för $0 < x < 3$. Derivatan är

$$V'(x) = 8x - 4x^2 = 4x(2-x).$$

Stationär punkt: $V'(x) = 0 \iff x = 2$. Teckenstudium ger att detta är ett lokalt maximum. Volymen antar alltså sitt största värde då $x = 2$ ($V(2) = 16/3$).

Svar: Stången ska delas i fyra bitar à 2 meter och en bit à 4 meter.

7. Den takt med vilken ett istäcke växer till vid konstant temperatur antas vara omvänt proportionell mot isens tjocklek. Låt $f(t)$ vara isens tjocklek (cm) vid tiden t (i timmar). Skriv upp en differentialekvation som f löser, och bestäm f om isens tjocklek är 1 cm vid tiden $t = 0$ och 2 cm efter 1 timme. (6p)

Lösning och svar:

f löser differentialekvationen $y' = \frac{k}{y}$. Separabel differentialekvation - vi kan skriva

$$y\frac{dy}{dt} = k.$$

Integrering ger

$$\int y\,dy = \int k\,dt \iff \frac{y^2}{2} = kt + C.$$

Vi har alltså $\dfrac{f(t)^2}{2} = kt + C$. Insättning av $f(0) = 1$ ger $C = \dfrac{1}{2}$. Insättning av $f(1) = 2$ ger nu $k = \dfrac{3}{2}$. Eftersom $f > 0$ får vi

$$f(t) = \sqrt{3t+1}.$$

Lycka till!
Oscar Marmon

Formelblad för MVE340, 11/12

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Linjär interpolation

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\qquad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$

Deriveringsregler

$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$ $\qquad$ $(kf(x))' = kf'(x)$ $\qquad$ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ $\qquad$ $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Några elementära funktioners derivator

$D(x^p) = px^{p-1}$ $\qquad$ $D(e^x) = e^x$ $\qquad$ $D(e^{cx}) = ce^{cx}$ $\qquad$ $D(a^x) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $D(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\qquad$ $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

Tangentens ekvation: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$: Newtons metod

Startvärde x_0, beräkna: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa enligt $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt \qquad \int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där s_1 och s_2 är lösningar $(s_1 \neq s_2)$ till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2 + cs + k = 0$. Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $x(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $x(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$

Vektor(kryss)produkt

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)\end{aligned}$$