Tentamen
MVE340 Matematik för Sjöingenjörer del 2

2012-05-24 8.30–12.30

Examinator: Oscar Marmon , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt och rond: Oscar Marmon , telefon: 772 5889

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 5 poäng på varje uppgift, eller minst 25 poäng på hela godkänddelen. Erhållen poäng på årets deltentor får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på denna tentamen.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 25/5. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Information om granskning meddelas via e-post då tentan är rättad.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkänddelen

1. (a) Till en funktion f har man följande värdetabell: (2p)

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	0.0	7.6	5.7	0.6	-1.7	-1.0	-0.1

Skissa grafen till f och finn ett närmevärde till $f(1.8)$ med linjär interpolering.

Lösning och svar:

$$f(1.8) \approx f(1.5) + \frac{f(2) - f(1.5)}{2 - 1.5}(1.8 - 1.5) = 0.6 + \frac{-1.7 - 0.6}{0.5} \cdot 0.3 = -0.78.$$

(b) Låt $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till f:s graf i den punkt där $x = 0$. (4p)

Lösning: Eftersom $f(0) = 1/2$, så är den sökta punkten $(0, 1/2)$. Med kvotregeln beräknar vi:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - 1 \cdot (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}.$$

Alltså är $f'(0) = \frac{1}{4}$, vilket är tangentens riktningskoefficient. Tangentens ekvation är alltså

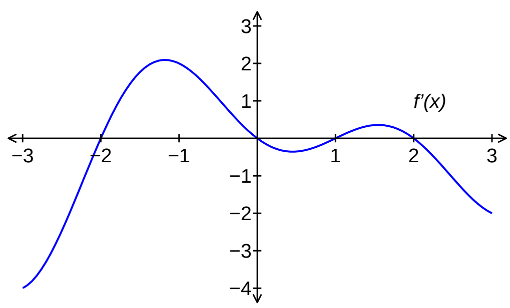
$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 0) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Normalens riktningskoefficient är $-1/f'(0) = -4$, så normalens ekvation är

$$y - \frac{1}{2} = -4(x - 0) \Longleftrightarrow y = -4x + \frac{1}{2}.$$

Svar: Tangentens ekvation: $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$, normalens ekvation $y = -4x + \dfrac{1}{2}$.

(c) Nedanstående graf visar **derivatan** $f'(x)$. Ange i vilka intervall funktionen $f(x)$ är växande respektive avtagande. (2p)



Lösning och svar: f är växande då $f' \geq 0$, dvs i intervallen $[-2,0]$ och $[1,2]$, och avtagande då $f' \leq 0$, dvs i intervallen $[-3,-2]$, $[0,1]$ och $[2,3]$.

2. (a) Skissa grafen till $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$ på intervallet $[-2,2]$. Ange alla lokala maxima och minima samt funktionens största och minsta värde på intervallet. (3p)

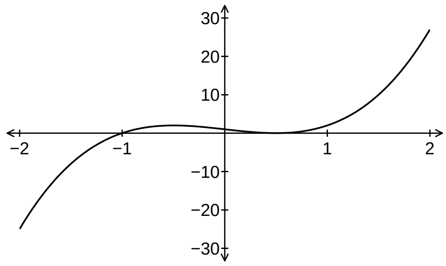
Lösning: Vi deriverar: $f'(x) = 12x^2 - 3$. Kritiska punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$. Vi gör en teckentabell

x		-1/2		1/2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

som avslöjar att f har ett lokalt maximum då $x = -\frac{1}{2}$ och ett lokalt minimum då $x = \frac{1}{2}$. Vi har även ett lokalt minimum i intervallets vänstra ändpunkt, -2, och ett lokalt maximum i den högra ändpunkten, 2. Vi gör en liten värdetabell

x	-2	-1/2	1/2	2
$f(x)$	-25	2	0	27

och skissar grafen



Svar: Lokala maxima: $f(-1/2) = 2$, $f(2) = 27$, lokala minima $f(-2) = -25$, $f(1/2) = 0$. Största värde: 27. Minsta värde: -25.

(b) Bestäm en approximativ rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 0.1$. (2p)

Lösning: Vi har $f(0) = -1 < 0$ och $f(1) = 2 > 0$, så ekvationen har en rot i intervallet $[0,1]$. Vi väljer startvärdet $x_0 = 1$. Vi behöver också räkna ut derivatan: $f'(x) = 12x^2 - 6x + 2$. Newtons metod ger

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.75, \qquad f(x_1) = 0.5,$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.6324, \qquad f(x_1) = 0.0765.$$

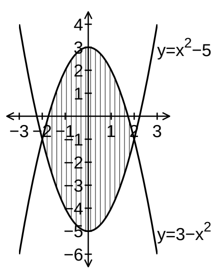
Svar: 0.6324 (Svar mellan 0.5675 och 0.6401 är acceptabla.)

(c) Beräkna arean av det begränsade området mellan graferna till $f(x) = x^2 - 5$ och $g(x) = 3 - x^2$. (Rita gärna en figur.) (3p)

Lösning: För att få integrationsgränserna behöver vi räkna ut skärningspunkterna mellan de två kurvorna, dvs de punkter x för vilka $f(x) = g(x)$:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5 = 3 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

En figur:



Vi har $g(x) \geq f(x)$ för $-2 \leq x \leq 2$, så den sökta arean blir

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} \left((3-x^2)-(x^2-5)\right)\,dx = \int_{-2}^{2} \left(8-2x^2\right)\,dx \\ &= \left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = 16 - \frac{16}{3} - (-16 + \frac{16}{3}) = \frac{64}{3} \approx 21.3. \end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{64}{3}$ areaenheter.

3. (a) En av de följande tre funktionerna är en lösning till differentialekvationen (2p)

$$y' - 2y = 2 - e^t.$$

Avgör vilken. (Motivera ditt svar.)

$$f(t) = 2 - e^{2t} \qquad g(t) = e^{2t} + e^t - 1, \qquad h(t) = \sin t - e^t.$$

Lösning: Om $y = g(t)$, så är $y' = g'(t) = 2e^{2t} + e^t$, vilket ger $y' - 2y = 2e^{2t} + e^t - 2(e^{2t} + e^t - 1) = 2 - e^t$.
Svar: $g(t)$

(b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + 3y = 0$ som uppfyller $y(0) = 5$. (2p)
Lösning: Den allmänna lösningen är $y(t) = Ce^{-3t}$. Begynnelsevillkoret ger $Ce^{-3\cdot 0} = 5 \Leftrightarrow C = 5$.
Svar: $y(t) = 5e^{-3t}$.

(c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 6y' + 10y = 0$ som uppfyller $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (4p)
Lösning: Karakteristiska ekvationen $s^2 + 6s + 10$ har rötterna $s = -3 \pm i$, så den allmänna lösningen är

$$y(t) = e^{-3t}(A\cos t + B\sin t).$$

Då är $y'(t) = -3e^{-3t}(A\cos t + B\sin t) + e^{-3t}(-A\sin t + B\cos t)$, så begynnelsevillkoren ger

$$y(0) = A = 1, \qquad y'(0) = -3A + B = 0 \Rightarrow B = 3A = 3\cdot 1 = 3.$$

Svar: $y(t) = e^{-3t}(\cos t + 3\sin t)$

4. (a) Lös ekvationssystemet $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 5z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & z & = & 8 \end{array}\right.$ (2p)

Lösning: Gausseliminering ger:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & 2z & = & 0 & \quad 1 \quad -2 \\ -x & + & 2y & + & 5z & = & 9 & \\ 2x & + & 4y & - & z & = & 8 & \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & 2z & = & 0 & \\ & & 3y & + & 3z & = & 9 & \cdot\frac{1}{3} \\ & & 2y & + & 3z & = & 8 & \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & 2z & = & 0 & \\ & & y & + & z & = & 3 & \quad -2 \\ & & 2y & + & 3z & = & 8 & \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 3 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Återsubstitution ger: $y = 3 - z = 1$, $x = -y + 2z = 3$.

Svar:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

(b) Avgör vilka av vektorerna $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -3)$ och $\mathbf{w} = (1, 2, 1)$ som är ortogonala (vinkelräta) mot varandra. (2p)

Lösning:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) = 0, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 4 \neq 0, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 = 0, \end{aligned}$$

Svar: $\mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$. $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är ej ortogonala mot varandra.

(c) Ange en ekvation för planet som går genom punkten $(1, 1, -1)$ och är ortogonalt mot vektorn $(3, 2, 1)$ (2p)

Lösning: Vektorn $(3, 2, 1)$ är alltså en normalvektor för planet, så planets ekvation är $3x + 2y + 1z = D$, där konstanten D beräknas genom att sätta in den givna punkten:

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = D \Longrightarrow D = 4.$$

Svar: $3x + 2y + z = 4$

(d) Bestäm skärningspunkten mellan linjen $(x, y, z) = (0, 1, 1) + t(1, 1, 0)$ och planet $2x + 3y - 3z = 5$. (2p)

Lösning: Vi sätter in $x = t$, $y = 1 + t$ och $z = 1$ i planets ekvation och löser ut t:

$$2t + 3(1 + t) - 3 = 5 \Leftrightarrow 5t = 5 \Leftrightarrow t = 1.$$

Skärningspunkten är alltså $(x, y, z) = (0, 1, 1) + 1 \cdot (1, 1, 0) = (1, 2, 1)$.

Svar: $(1, 2, 1)$

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. En hungrig student sätter in en stek i en ugn på 175°C. Stekens innertemperatur $y(t)$ vid tiden t kan då antas uppfylla differentialekvationen (6p)

$$y' = k(175 - y)$$

för någon konstant k. Bestäm den allmänna lösningen till denna (separabla) differentialekvation. Om stekens temperatur är 8°C då den sätts in, och 16°C efter 10 minuter, hur lång tid tar det innan temperaturen uppnår 70°C?

Lösning: Vi börjar med att observera att $y = 175$ är en lösning till differentialekvationen. Om vi nu antar att $y \neq 175$, kan vi dividera båda leden med $175 - y$ och få

$$\frac{1}{175-y}\frac{dy}{dt} = k.$$

Integrering ger

$$\int \frac{1}{175-y}dy = \int k\,dt \iff -\ln|175-y| = kt + C_1,$$

där C_1 är en godtycklig konstant. Exponentiering ger

$$175 - y = C_2e^{-kt}$$

där $C_2 = \pm e^{-C_1} \neq 0$. Men eftersom $y = 175$ också är en lösning kan vi även tillåta $C_2 = 0$. Den allmänna lösningen blir alltså

$$y = 175 - Ce^{-kt}, \quad \text{där } C \text{ är en godtycklig konstant.}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 8$ ger $8 = 175 - C$, dvs $C = 167$. Villkoret $y(10) = 16$ ger

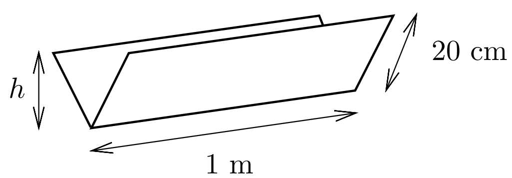
$$16 = 175 - 167e^{-10k} \iff k = \frac{\ln 167 - \ln 159}{10} \approx 0.004909.$$

Vi ska nu bestämma t så att $y(t) = 70$:

$$175 - 167e^{-0.004909t} = 70 \iff t = \frac{\ln 167 - \ln 105}{0.004909} \approx 94.5.$$

Svar: Efter ca 94.5 min.

6. Man vill tillverka en V-formad ränna genom att bocka en rektangulär plåt med dimensionerna 40 cm × 1 m på längden, se figur nedan. Bestäm det värde på rännans höjd h som gör att rännans volym blir maximal. (6p)



Lösning: Om b är rännans bredd i m, så är volymen av rännan $V = 1 \cdot \dfrac{bh}{2}$ (m^3). Pytagoras sats ger att $(b/2)^2 + h^2 = 0.2^2$, så $b = 2\sqrt{0.04 - h^2}$. Insättning ger volymen som funktion av höjden:

$$V(h) = h\sqrt{0.04 - h^2}.$$

Vi söker alltså det största värdet av $V(h)$ för $0 < h < 0.2$. Derivatan är

$$V'(h) = \sqrt{0.04 - h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{0.04 - h^2}} = \frac{0.04 - 2h^2}{\sqrt{0.04 - h^2}}.$$

Stationär punkt då $V'(h) = 0 \iff h = \sqrt{0.02} \approx 0.141$. Man övertygar sig lätt om att detta är en lokal maximipunkt, och att V därmed antar sitt största värde ($V(\sqrt{0.02}) = 0.02$) där.

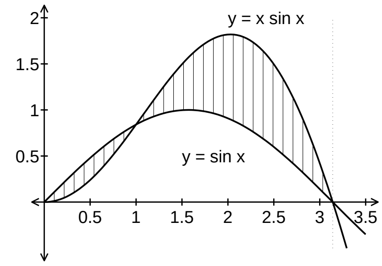
Svar: $\sqrt{0.02}$ m ≈ 14.1 cm. (Rännans volym är då 0.02 m^3 eller 20 liter.)

7. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = \sin x$, $y = x \sin x$ och de lodräta linjerna $x = 0$ och $x = \pi$. (Rita figur och tänk noga igenom hur området ser ut!)

Lösning: Vi bestämmer samtliga skärningspunkter mellan de två kurvorna:

$$x \sin x = \sin x \iff (x - 1)\sin x = 0 \iff x = 1 \text{ eller } x = n\pi \ (n \text{ heltal}).$$

Området vars area vi ska beräkna ser ut så här:



Arean ges alltså av

$$A = \int_0^1 (\sin x - x \sin x)dx + \int_1^\pi (x \sin x - \sin x)dx.$$

Vi bestämmer en primitiv funktion till $x \sin x$ med partiell integrering:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x.$$

Arean blir alltså

$$\begin{aligned} A &= \big[-\cos x + x\cos x - \sin x\big]_0^1 + \big[-x\cos x + \sin x + \cos x\big]_1^\pi \\ &= \pi - 2\sin 1 \approx 1.46. \end{aligned}$$

Svar: $\pi - 2\sin 1 \approx 1.46$ a.e.

Lycka till!
Oscar Marmon

Formelblad för MVE340, 11/12

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Linjär interpolation

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\quad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$

Deriveringsregler

$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$ $\qquad$ $(kf(x))' = kf'(x)$ $\qquad$ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ $\qquad$ $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Några elementära funktioners derivator

$D(x^p) = px^{p-1}$ $\qquad$ $D(e^x) = e^x$ $\qquad$ $D(e^{cx}) = ce^{cx}$ $\qquad$ $D(a^x) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $D(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\qquad$ $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

Tangentens ekvation: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$: Newtons metod

Startvärde x_0, beräkna: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa enligt $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt \qquad \int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där s_1 och s_2 är lösningar ($s_1 \neq s_2$) till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2 + cs + k = 0$. Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $x(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $x(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$

Vektor(kryss)produkt

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)\end{aligned}$$