

Tentamen

MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer

2014-08-29 8.30–12.30

Examinator: Joakim Becker, Matematiska vetenskaper

Telefonvakt och rond: Joakim Becker, telefon: 072 5167462

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 5 poäng på varje uppgift, eller minst 25 poäng på hela godkänddelen. Poäng på duggor eller tentor enligt pingpong (VT14) får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på denna tentamen. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkänddelen

1. (a) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \frac{3}{x^3}}{5x - \frac{4}{x^3}}$ (2p)
- (b) Låt $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x + 1}$. Bestäm tangent och normal till f :s graf i punkten där $x = -2$. (3p)
- (c) Om $f'(x) = (x - 2)(3 - x^2)^2$, vilken av $f(0)$ och $f(2)$ är störst? Motivera ditt svar. (1p)
- (d) Till en funktion f har man följande värdetabell: (2p)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	4.1	3	2.5	1	1.7	2.9

Skissa grafen till f och finn ett närmevärde till $f(3.7)$ med linjär interpolering.

2. (a) Skissa grafen till $f(x) = x^3 - 3x^4$ på intervallet $[-1, 1]$. Ange alla lokala maxima och minima samt funktionens största och minsta värde på intervallet. (3p)
- (b) Bestäm en approximativ rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = -2 + x^2 + 2x^3$. Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 0.05$. (2p)
- (c) Beräkna arean mellan kurvorna $y = 3x + 4$ och $y = x^2 + 3x$ (3p)
3. (a) Bestäm a och b så att funktionen $y(t) = at^2 + bt$ är en lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 4y = t^2 - 3/2$. (2p)
- (b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $3y' + 4y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 5$. (2p)
- (c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 6y' + 13y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$. (4p)
4. (a) Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(2, 1, 2)$ och $(5, -3, -1)$ på parameterform. (2p)
- (b) Bestäm en vektor som är ortogonal (vinkelrät) mot båda vektorerna $(3, 1, 2)$ och $(0, 3, 5)$. (2p)
- (c) Ange en ekvation för planet som går genom punkten $(0, 1, -3)$ och är vinkelrätt mot vektorn $(3, 1, -5)$. (2p)
- (d) Bestäm skärningspunkten mellan linjen $(x, y, z) = (0, -2, 2) + t(5, 1, -2)$ och planet $4x - 3y + 5z = 2$. (2p)

Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkänt. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(3x) dx$. (3p)

(b) Beräkna integralen $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x+2\sqrt{x}} dx$. (3p)

6. Ett plan genom punkterna $(1, 2, 3)$ och $(2, 2, 1)$ bildar tillsammans med de positiva koordinataxlarna en tetraeder. Bestäm planets ekvation så att tetradedens volym (basyta*höjd/3) blir minimal. (6p)

7. En tank rymmer 200 liter saltvatten. Genom ett rör tillförs 50 gram salt per liter vatten med ett flöde av 10 liter/min. Om saltlösningen i samma takt rinner ur tanken i ett annat rör, när återstår endast 10% av den ursprungliga mängden salt i tanken? (Vi antar att saltet är jämnt fördelat i tanken) (6p)

Lycka till!

Formelblad för MVE340.

Trigonometri.

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) & \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Linjär interpolering.

$$a < c < b, \quad f(a), \quad f(b) \text{ kända:} \quad f(c) \approx f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$$

Deriveringsregler.

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) & (kf(x))' &= kf'(x) & (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} & (f(g(x)))' &= f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

Några derivator.

$$\begin{aligned}D(x^p) &= px^{p-1} & D(e^x) &= e^x & D(e^{cx}) &= ce^{cx} & D(a^x) &= a^x \ln a \\ D(\ln x) &= \frac{1}{x} & D(\sin x) &= \cos x & D(\cos x) &= -\sin x & D(\tan x) &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$.

$$\text{Tangentens ekvation: } y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \text{Normalens ekvation: } y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod.

$$\text{Startvärde } x_0, \text{ upprepa } x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \text{ tills } |f(x_{k+1})| \text{ är litet nog.}$$

Integralkatalog.

$$\begin{aligned}\int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1) & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int e^x dx &= e^x + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1) \\ \int f(g(x))g'(x) dx &= \int f(t) dt & \int f(x)g(x) dx &= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx\end{aligned}$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$ har den allmänna lösningen $y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där $s_{1,2}$ är lösningar till karakteristiska ekvationen $ms^2 + cs + k = 0$, ($s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$). Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $y(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $y(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$.

Vektor(kryss)produkt

$$\begin{aligned}u \times v &= (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)\end{aligned}$$