MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 120420 kl. 13.15 - 15.00

Telefonvakt: Oscar Marmon, 0709-414755

MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer
Deltentamen 2

Erhållen poäng på denna deltenta får ersätta poängen på uppgift 2 på tentamen tills kursen ges nästa läsår. Deltentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via PingPong.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

---

2. (a) Skissa grafen till funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ på intervallet $[-2, 3]$. Ange alla lokala maxima och minima samt funktionens största och minsta värde på intervallet. (3p)

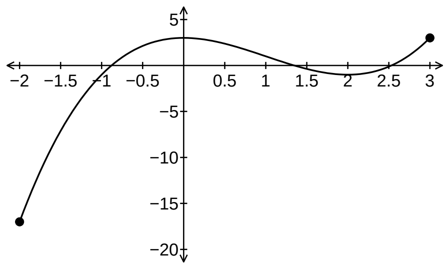
Lösning: Vi deriverar: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Kritiska punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller 2. Vi gör en teckentabell

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

som avslöjar att f har ett lokalt maximum i 0 och ett lokalt minimum i 2. Vi har även ett lokalt minimum i intervallets vänstra ändpunkt, -2, och ett lokalt maximum i den högra ändpunkten, 3. Vi gör en liten värdetabell

x	-2	0	2	3
$f(x)$	-17	3	-1	3

och skissar grafen



Svar: Lokala maxima: $f(0) = f(3) = 3$, lokala minima $f(-2) = -17$, $f(2) = -1$. Största värde: 3. Minsta värde: -17.

(b) Bestäm en approximativ rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = x^3 - x - 10$. Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 0.05$. (2p)

Lösning: Vi har $f(2) = -4 < 0$ och $f(3) = 14 > 0$, så ekvationen har en rot i intervallet $[2, 3]$. Vi väljer startvärdet $x_0 = 2$. Vi behöver också räkna ut derivatan: $f'(x) = 3x^2 - 1$. Newtons metod ger

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.3636, \qquad f(x_1) = 0.8414,$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.3102, \qquad f(x_1) = 0.02.$$

Svar: 2.3102 (Svar mellan 2.3056 och 2.3122 är acceptabla.)

(c) Beräkna medelvärdet av funktionen $f(x) = e^{2x} - x$ på intervallet $[0, 2]$. (2p)

Lösning och svar:

$$\bar{f} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 (e^{2x} - x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{e^4}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 0\right)\right) = \frac{1}{4}(e^4 - 5) \approx 12.4.$$

(d) Ange en primitiv funktion till $f(x) = x^2 \ln x$. (*Tips:* använd partiell integrering) (1p)

Lösning:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx$$
$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Svar: $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$.

Lycka till!
Oscar M

Formelblad för MVE340, 11/12

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Linjär interpolation

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\qquad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$

Deriveringsregler

$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$ $\qquad$ $(kf(x))' = kf'(x)$ $\qquad$ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ $\qquad$ $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Några elementära funktioners derivator

$D(x^p) = px^{p-1}$ $\quad$ $D(e^x) = e^x$ $\quad$ $D(e^{cx}) = ce^{cx}$ $\quad$ $D(a^x) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $D(\sin x) = \cos x$ $\quad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\quad$ $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

Tangentens ekvation: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$: Newtons metod

Startvärde x_0, beräkna: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa enligt $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog

$$
\begin{aligned}
\int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\
\int e^x dx &= e^x + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1) \\
\int f(g(x))g'(x) dx &= \int f(t) dt & \int f(x)g(x) dx &= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx
\end{aligned}
$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$ har den allmänna lösningen $y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där s_1 och s_2 är lösningar $(s_1 \neq s_2)$ till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2 + cs + k = 0$, $(m,\ c,\ k$ konstanter). Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $y(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $y(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$

Vektor(kryss)produkt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) \\
&= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}
$$