MATEMATIK | **Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 120508 kl. 13.15 - 15.00
Telefonvakt: Oscar Marmon, 0709-414755

MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer
Deltentamen 3

Erhållen poäng på denna deltenta får ersätta poängen på uppgift 3 på tentamen tills kursen ges nästa läsår. Deltentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via PingPong.
Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

---

3. (a) Funktionen $y(t) = t\,e^{3t}$ uppfyller en av de tre differentialekvationerna nedan. Avgör vilken. (Motivera ditt svar.) (2p)

i. $y'(t) - y(t) = e^{3t}$ ii. $t \cdot y'(t) = 3y(t)$ iii. $y'(t) - 3y(t) = e^{3t}$

Lösning och svar: $y'(t) = e^{3t} + 3te^{3t}$, så $y'(t) - 3y(t) = e^{3t} + 3te^{3t} - 3te^{3t} = e^{3t}$, dvs $y(t)$ uppfyller differentialekvation iii.

(b) Då dagsljuset tränger ner i en sjö avtar ljusets intensitet $I(x)$ med djupet x under vattenytan enligt Lamberts lag: (1p)

$$\frac{dI}{dx} = -kI$$

där k är en positiv konstant. Bestäm funktionen $I(x)$.

Svar: $I(x) = Ce^{-kx}$, där C är en godtycklig konstant.

(c) Antag i (b) att ljusintensiteten är $I(0) = I_0$ vid ytan och $I(1) = 0.4\,I_0$ på 1 meters djup. Bestäm $I(x)$. (2p)

Lösning: Eftersom $I(0) = Ce^0 = C$, ger det första villkoret att $C = I_0$, dvs $I(x) = I_0e^{-kx}$. Det andra villkoret ger

$$I_0e^{-k\cdot 1} = 0.4\,I_0 \Leftrightarrow e^{-k} = 0.4 \Leftrightarrow k = -\ln(0.4) \approx 0.92.$$

Svar: $I(x) = I_0\,e^{-0.92x}$ (eller $I(x) = I_0 \cdot 0.4^x$).

(d) Lös differentialekvationen (3p)

$$y''(t) + 25y(t) = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Lösning: Karakteristiska ekvationen $s^2 + 25 = 0$ har rötterna $s_{1,2} = \pm 5i$, så den allmänna lösningen blir

$$y(t) = A\cos 5t + B\sin 5t, \quad \text{där } A \text{ och } B \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

Då är $y'(t) = -5A\sin 5t + 5B\cos 5t$, så begynnelsevillkoren ger

$$y(0) = A = 2, \qquad y'(0) = 5B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{5}.$$

Svar: $y(t) = 2\cos 5t + \dfrac{1}{5}\sin 5t$.

Lycka till!
Oscar M

Formelblad för MVE340, 11/12

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Linjär interpolation

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\quad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$

Deriveringsregler

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \qquad (kf(x))' = kf'(x) \qquad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Några elementära funktioners derivator

$D(x^p) = px^{p-1} \qquad D(e^x) = e^x \qquad D(e^{cx}) = ce^{cx} \qquad D(a^x) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x} \qquad D(\sin x) = \cos x \qquad D(\cos x) = -\sin x \qquad D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

Tangentens ekvation: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ Normalens ekvation: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$: Newtons metod

Startvärde x_0, beräkna: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa enligt $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt \qquad \int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där s_1 och s_2 är lösningar $(s_1 \neq s_2)$ till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2 + cs + k = 0$. Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $x(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $x(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$

Vektor(kryss)produkt

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)\end{aligned}$$