Tentamen
MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer

2015-04-14 08.30–12.30

Examinator: Joakim Becker, Matematiska vetenskaper

Telefonvakt och rond: Joakim Becker, telefon: 0766 351106

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 5 poäng per uppgift, eller minst 25 poäng på hela godkäntdelen. Poäng på duggor eller tentor enligt pingpong (VT14) får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på denna tentamen. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkäntdelen

1. (a) Beräkna $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-2x^2+1}{2x-3x^3}$ (2p)

(b) Låt $f(x) = (x^2-1)(2x+1)^2$. Bestäm tangent och normal till f:s graf i punkten där $x = -1$. (3p)

(c) Givet $f'(x) = (x+3)(4-x^2)$. I vilka intervall är funktionen $f(x)$ avtagande? Motivera. (1p)

(d) Till en funktion f har man följande värdetabell: (2p)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	-2.3	-3	-2.5	-1.7	0	1.2

Skissa grafen till f och finn ett närmevärde till $f(1.3)$ med linjär interpolering.

2. (a) Låt $f(x) = 2x^3-9x^2+12x$. Ange alla lokala maxima och minima samt skissa grafen. (3p)

(b) Bestäm en approximativ rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = 1+4x^2-2x^3$. Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 0.05$. (2p)

(c) Beräkna arean mellan kurvorna $y = x^2 - x$ och $y = 2x^2 + 3x$ (3p)

3. (a) Bestäm a och b så att funktionen $y(t) = at^2+bt$ är en lösning till differentialekvationen $y'' + 2y = t \cdot y' + 2t + 1$ (2p)

(b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $2y' - y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y'(0) = 3$. (2p)

(c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 6y' + 13y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$. (4p)

4. (a) Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(1, 3, 0)$ och $(3, -4, -2)$ på parameterform. (2p)

(b) Bestäm en vektor som är ortogonal (vinkelrät) mot båda vektorerna $(2, 2, 5)$ och $(0, 4, -3)$. (2p)

(c) Ange ekvationen för planet som går genom punkten $(2, 0, -1)$ och är vinkelrätt mot vektorn $(1, -2, 4)$. (2p)

(d) Bestäm skärningslinjen på parameterform mellan planen $2x - y + 3z = -1$ och $4x - 3y + 5z = 2$. (2p)

Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkänt. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Beräkna följande integraler. (6p)

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-x}}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}\,.$

6. Bestäm den räta linje som tangerar både $y = x^2$ och $y = x^2 - 2x$. (6p)

7. En låda med kvadratisk botten står på marken i ett koniskt tält som har höjden 2 m och radien 1 m (vid marken). Bestäm lådans maximala volym. (6p)

Lycka till!

Formelblad för MVE340.

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \qquad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Linjär interpolering.

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\quad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$

Deriveringsregler.

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) \qquad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Några derivator.

$$D(x^p) = px^{p-1} \qquad D(e^x) = e^x \qquad D(e^{cx}) = ce^{cx} \qquad D(a^x) = a^x \ln a$$

$$D(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad D(\sin x) = \cos x \qquad D(\cos x) = -\sin x \qquad D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$.

Tangentens ekvation: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y = f(a) - \dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod.

Startvärde x_0, upprepa $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog.

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \qquad \int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$ har den allmänna lösningen $y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där $s_{1,2}$ är lösningar till karakteristiska ekvationen $ms^2 + cs + k = 0$, ($s = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$). Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $y(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $y(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$.

Vektor(kryss)produkt

$$\begin{aligned} u \times v &= (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$