Tentamen
MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer

2015-06-03 14.00 - 18.00

Examinator: Joakim Becker, Matematiska vetenskaper

Telefonvakt och rond: Joakim Becker, telefon: 0766 351106

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 5 poäng per uppgift, eller minst 25 poäng på hela godkäntdelen. Poäng på duggor eller tentor enligt pingpong (VT15) får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på denna tentamen. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkäntdelen

1. (a) Beräkna $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x-2x^2+1}{x^2-4}$ (2p)

(b) Låt $f(x) = (x^2-4)^2(3-x)$. Bestäm tangent och normal till f:s graf i punkten där $x = 1$. (3p)

(c) Givet $f'(x) = (x+2)(1-x^2)$. I vilka intervall är funktionen $f(x)$ avtagande? Motivera. (2p)

(d) Till en funktion f har man följande värdetabell: (1p)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	4.5	3	2.5	1.7	0	-1.2

Finn ett närmevärde till $f(-1.8)$ med linjär interpolering.

2. (a) Låt $f(x) = 4x^3 - 3x^2,\ -1 \le x \le 1,$. Ange alla lokala maxima/minima, största och minsta värdet samt skissa grafen. (3p)

(b) Bestäm en approximativ rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = -8 + 4x^3 - x^2$. Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 0.05$. (2p)

(c) Beräkna arean mellan kurvan $y = x^2 + 3x$ och linjen $y = x + 8$ (3p)

3. (a) Bestäm a och b så att funktionen $y(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$ är en lösning till differentialekvationen $y'' + 2\cdot y = 4\cos(2t) - \sin(2t)$. (2p)

(b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $3y' + y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y'(0) = -2$. (2p)

(c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 12y' + 100y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 4,\ y'(0) = 0$. (4p)

4. (a) Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(0, -3, 5)$ och $(1, -4, 3)$ på parameterform. Avgör om punkten (-1,-2,3) ligger på linjen. Motivera. (2p)

(b) Bestäm en vektor som är ortogonal (vinkelrät) mot båda vektorerna $(4, 2, 1)$ och $(-1, 3, 5)$. (2p)

(c) Ange ekvationen för planet som går genom punkten $(3, 0, 2)$ och är vinkelrätt mot vektorn $(2, 5, -1)$. (2p)

(d) Bestäm skärningspunkten mellan mellan linjen $(x, y, z) = (1, 1, 0) + t(2, -3, 4)$ och planet $2x - y - 2z = 3$. (2p)

Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkänt. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Beräkna följande integraler. (6p)

(a) $\displaystyle\int \cos(x)\, e^{\sqrt{\sin x}}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx.$

6. Tangenten till funktionen $y = f(x)$ i punkten $A = (a, f(a))$ skär x-axeln i punkten B. Punkterna A och B bildar tillsammans med punkten $(a, 0)$ för varje värde på a en triangel med konstant area. Bestäm funktionen $f(x)$ om den uppfyller villkoren $f(0) = 1,\ f(1) = 2$. (6p)

7. Givet två punkter $P_1 = (1, 2, 3)$ och $P_2 = (2, 3, 1)$. Bestäm den punkt, P_3 på linjen genom punkten $(3, 5, 4)$ med riktningsvektor $\mathbf{v} = (1, -2, -2)$ så att arean av triangeln med hörn i P_1, P_2 och P_3 blir minimal. (6p)

Lycka till!

Formelblad för MVE340.

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \qquad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Linjär interpolering.

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\quad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$

Deriveringsregler.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Några derivator.

$$D(x^p) = px^{p-1} \qquad D(e^x) = e^x \qquad D(e^{cx}) = ce^{cx} \qquad D(a^x) = a^x \ln a$$
$$D(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad D(\sin x) = \cos x \qquad D(\cos x) = -\sin x \qquad D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$.

Tangentens ekvation: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ Normalens ekvation: $y = f(a) - \dfrac{1}{f'(a)}(x - a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod.

Startvärde x_0, upprepa $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog.

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$
$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \qquad \int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$ har den allmänna lösningen $y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där $s_{1,2}$ är lösningar till karakteristiska ekvationen $ms^2 + cs + k = 0$, ($s = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$). Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $y(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $y(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$.

Vektor(kryss)produkt

$$u \times v = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1)$$
$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$