Linjär interpolering

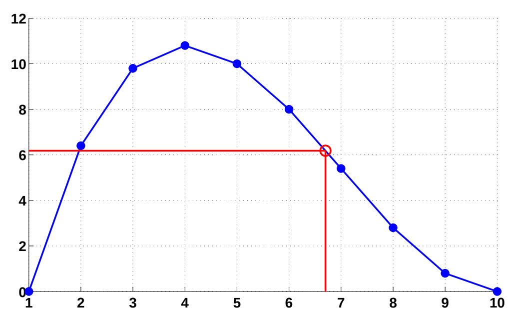
I praktiska tillämpningar förekommer det ofta att man inte känner till ett exakt uttryck för den funktion man är intresserad av, utan endast dess värde i ett antal punkter, t ex genom mätningar. För att uppskatta funktionens värde i andra punkter får man använda någon form av *interpolering*.

Exempel. Antag att storheterna x och y uppfyller sambandet $y = f(x)$, och att vi har följande data:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	6.4	9.8	10.8	10	8	5.4	2.8	0.8	0

Finn ett närmevärde till $f(6.7)$.

Lösning. Vi använder *linjär interpolering*, d v s vi binder samman de givna punkterna med räta linjestycken och läser av det önskade värdet $f(6.7)$ ur grafen (se figur 1).



Figur 1: Närmevärde till $f(6.7)$ genom linjär interpolering.

Snarare än att visuellt läsa av närmevärdet i figuren, räknar vi ut det på följande sätt. Ekvationen för den räta linjen genom de två punkterna $(6,8)$ och $(7,5.4)$ ges av

$$y - 8 = k(x-6), \quad \text{där } k = \frac{5.4-8}{7-6} = -2.6.$$

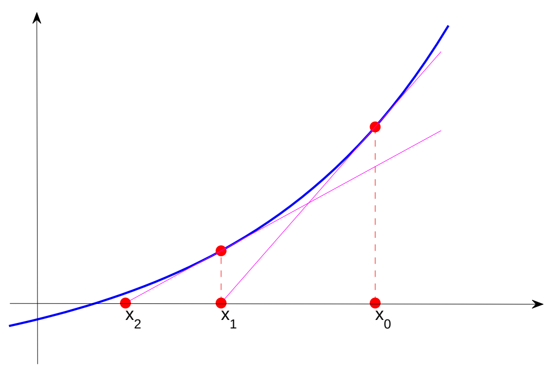
Med $x = 6.7$ får vi $y = 8 - 2.6 \cdot (6.7-6) = 6.18$, vilket är vårt önskade närmevärde. $\square$

Allmänt kan vi alltså, om värdet av en funktion f är känt i två punkter a och b, där $a \leq b$, räkna ut ett närmevärde till funktionen i en punkt $c \in [a,b]$ med formeln

$$f(c) \approx f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a).$$

Newtons metod

Vi vill nu hitta ett nollställe till funktionen f (dvs. en rot till ekvationen $f(x) = 0$), se figur 2. Först väljer vi ett lämpligt startvärde x_0. Tangenten av f i punkten x_0, dvs



Figur 2: Newtons metod

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, är en bra approximation för f i närheten av x_0. Därför är det rimligt att anta att ett nollställe till tangenten ligger nära det sökta nollstället till f. Och vi sätter $y = 0$ i tangentens ekvation och löser ut $x = x_1$ får vi

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Detta blir vårt nästa närmevärde. Vi upprepar sedan proceduren, enligt formeln

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

tills vi uppnått önskad noggrannhet.

Exempel. Finn en rot till ekvationen $x^3 - x - 1 = 0$ med Newtons metod.

Lösning. Låt $f(x) = x^3 - x - 1$. Vi har att $f(1) < 0$ och $f(2) > 0$, så en rot måste finnas i intervallet $[1,2]$. Låt oss därför välja $x_0 = 1.5$ som startvärde. Nu behöver vi även derivatan av f:

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Med formeln ovan räknar vi ut nästa närmevärde:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5 - \frac{1.5^3 - 1.5 - 1}{3 \cdot 1.5^2 - 1} = 1.3478\ldots$$

För att se hur nära vi är den sanna roten, räknar vi ut $f(x_1) = 0.1006\ldots$ (vi behöver ju ändå detta värde i nästa steg). Nu upprepar vi proceduren och får

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.3252\ldots, \quad f(x_2) = 0.002058\ldots.$$

Ett steg till ger

$$x_3 = 1.3247, \quad f(x_3) = 0.0000009243\ldots.$$

Som synes närmar vi oss roten mycket snabbare än med intervallhalveringsmetoden.
□

Övningar

1. Till en funktion f har vi följande värdetabell:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	-3.4	-2.7	-0.3	0.8	0	-0.3	1.3	3.0	1.6	-2.7

   Skissa grafen till funktionen för $1 \leq x \leq 10$. Beräkna närmevärde till $f(3.7)$ med hjälp av linjär interpolering.

2. Antag att storheterna x och y uppfyller sambandet $y = g(x)$, och att vi har erhållit följande mätdata:

x	0.2	1.2	2.0	3.3	4.1	5.0
y	8.0	7.6	5.5	0.6	-1.7	-1.0

   Beräkna ett närmevärde till $f(3.0)$ med linjär interpolering.

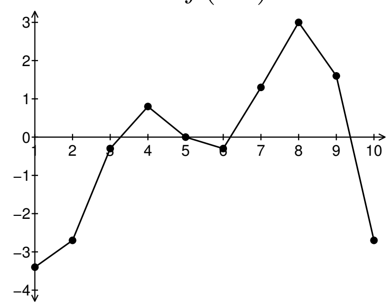
3. Bestäm en rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod, då

   (a) $f(x) = x^3 + 2x + 5$, (b) $f(x) = x^5 - x^3 - 1$.

   Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 10^{-3}$.

Facit

1. Närmevärde: $f(3.7) \approx 0.47$. Graf:



2. $f(3.0) \approx 1.73$.

3. (a) -1.3284

   (b) 1.2365