Linjära ekvationssystem och minsta-kvadratmetoden i MATLAB

Matematik 2 MVE340 Sjöingenjörsprogrammet

28 april 2016

I bl.a. kursen i Reglerteknik kommer ni att använda beräkningsprogrammet MATLAB. Vi visar här hur man använder detta program för att lösa linjära ekvationssytem samt anpassa en rät linje till givna mätdata med minsta-kvadratmetoden.

Linjärt ekvationssystem.

Anta att vi vill beräkna skärningspunkten mellan de tre planen $x + 2y + 3z = 4$, $x + 3y - 5z = -2$, $2x - 5z = 1$. Detta innebär att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = 4 \\ x & +3y & -5z & = -2 \\ 2x & & -5z & = 1. \end{cases}$$

I MATLAB löser vi detta system på följande sätt. Vi bildar en så kallad matris av talen framför variablerna i vänsterleden och en kolumn av högerleden

```
>> A=[1 2 3;1 3 -5;2 0 -5] % Koefficientmatrisen
>> b=[4 ;-2; 1] % Högerledet
>> x=A\b % Notera det omvända divisionstecknet
```

Variabeln `x` innehåller nu lösningen $x,\ y,\ z$ i turordning. Får man en varning kan det innebära att systemet har oändligt många lösningar. Då kan man använda kommandot `rref([A b])`.

Minsta kvadratmetoden

Vi skall nu beskriva hur man kan anpassa en rät linje till mätdata i minsta-kvadratmetodens mening. Vi har en serie med n stycken mätpunkter (t_1, y_1), (t_2, y_2), $\ldots, (t_n, y_n)$ numrerade från 1 till n, som verkar ligga ungefär utefter en rät linje om man ritar dem i ett koordinatsystem. För att hitta den "bästa" linjen $y = k \cdot t + m$ enligt minsta-kvadratmetoden, skall man minimera summan av kvadraterna på avvikelserna mellan linjens y-värden och mätvärdena y_i. Matematiskt innebär det att minimera uttrycket

$$(y_1 - k \cdot t_1 - m)^2 + (y_2 - k \cdot t_2 - m)^2 + \cdots + (y_n - k \cdot t_n - m)^2$$

Om vi sätter derivatorna av detta uttryck med avseende på k resp. m till noll fås efter lite omskrivning följande ekvationssystem

$$\begin{cases} k \cdot \sum t^2 & +m \cdot \sum t & = \sum ty \\ k \cdot \sum t & +m \cdot n & = \sum y \end{cases}$$

Här löser vi ut k och m på vanligt sätt. I MATLAB löser man detta på föjande smidiga sätt. Man skriver upp det ekvationssystem som innebär att den räta linjen går genom alla mätpunkterna (detta system är förstås olösbart eftersom det normalt inte finns någon sådan linje) och "löser" systemet som ovan med "\". Vi visar med ett exempel.

Exempel minsta-kvadratmetoden.

Anpassa en rät linje till till mätpunkterna

t	1	2	3	4	5
y	2.1	3.3	4.0	4.9	5.7

.

Lösning.

Vi löser först uppgiften för hand.

$$\sum t = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \quad \sum t^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55,$$
$$\sum ty = 1 \cdot 2.1 + 2 \cdot 3.3 + 3 \cdot 4.0 + 4 \cdot 4.9 + 5 \cdot 5.7 = 68.8,$$
$$\sum y = 2.1 + 3.3 + 4.0 + 4.9 + 5.7 = 20$$

vilket ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} 55k & +15m & = 68.8 \\ 15k & +5m & = 20 \end{cases}$$

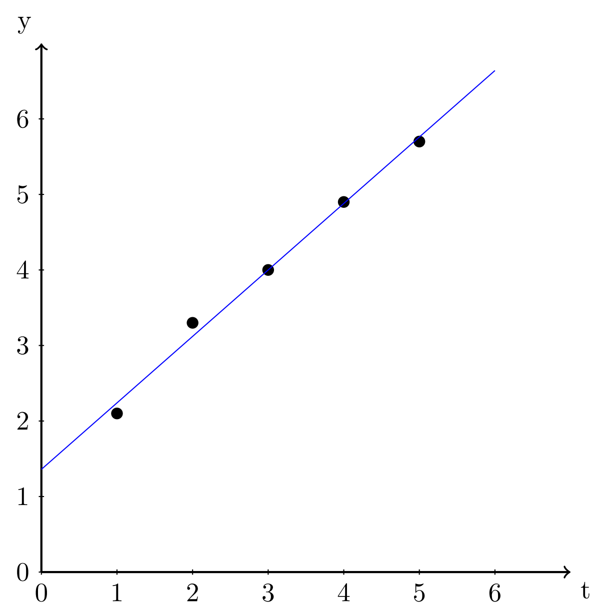
som har lösningen $k = 0.88,\ m = 1.36$ (t.ex. kan man lösa ut m ur den andra ekvationen och sätta in i den första).

För att lösa uppgiften i MATLAB så ställer vi upp ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 1k & +m & = 2.1 \\ 2k & +m & = 3.3 \\ 3k & +m & = 4.0 \\ 4k & +m & = 4.9 \\ 5k & +m & = 5.7 \end{cases}$$

där varje rad svarar mot mätdata (t, y) insatt i sambandet $kt + m = y$.

```
>> t=[1; 2; 3; 4; 5]
>> y=[2.1; 3.3; 4.0; 4.9; 5.7] % Högerledet
>> A=[1 1; 2 1; 3 1; 4 1; 5 1]; % Koefficientmatrisen, alternativt A=[t ones(size(t)]
>> x=A\y % Beräkna k och m
>> % Plotta mätpunkter '*' och räta linjen i samma bild:
>> plot(t,y,'*'),hold on,plot(t,A*x)
ans =
      0.8800  % k
      1.3600  % m
```



Övningsuppgifter

1. Bestäm mha av MATLAB det andragradspolynom (dvs $y = ax^2 + bx + c$) som passerar genom punkterna $(-1, -4)$, $(1, 3)$, $(3, -7)$. (Svar: $y = -2.125x^2 + 3.5x + 1.625$.)

2. Bestäm för hand och mha MATLAB den räta linje som i minsta-kvadratmetodens mening är bäst anpassad till mätdata (Svar: $y = -1.63t + 6.73$)

t	1	2	3	4	5
y	5.1	3.4	1.9.	0.3	-1.5