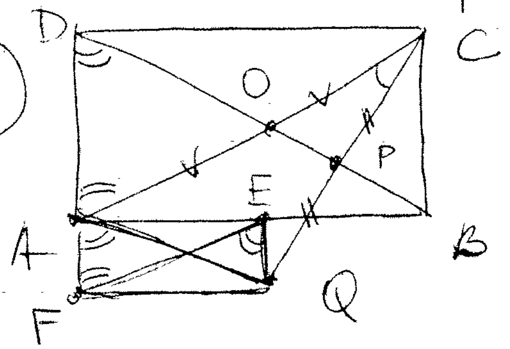
MVE365 Problemlösning o lärande

Lösningar 26/8-14



1. Beteckna $AC \cap BD = \{O\}$

$$\left.\begin{array}{l} AO = OC \\ QP = PC \\ \angle ACQ = \\ \angle OCP \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OPC \sim \triangle AQC \quad (s-v-s)$$

$$\Rightarrow \angle POC = \angle QAC \Rightarrow OP \parallel AQ$$

$$OP \subset BD \Rightarrow AQ \parallel BD$$

$$AQ \parallel BD \Rightarrow \angle QAF = \angle BDF$$

$\triangle AOD$ likbent $\Rightarrow \angle BDF = \angle DAC$

analogt i lilla rektangeln $AFQE$: $\angle QAF = \angle AFE$

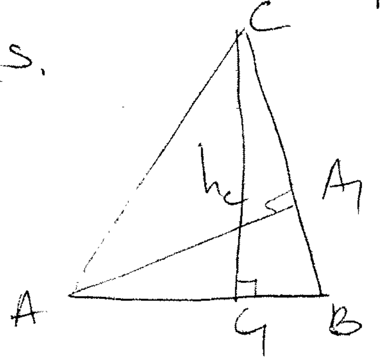
$$\Rightarrow \angle DFE = \angle DAC$$

$$\Rightarrow EF \parallel AC$$

---

2. Två fall måste betraktas: (1) en av höjderna är mot den givna sidan; (2) de två andra höjderna är givna.

(1) Analys.



Givet: $AB = c$

$AA_1 = h_a$

$CC_1 = h_c$

Pkten C är på avstånd h_c från linjen AB

$\angle AA_1B$ rät $\Rightarrow A_1 \in$ halvcirkel med diameter AB

Konstruktion Rita sträckan $AB = c$.

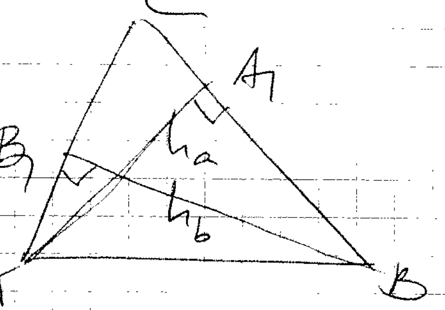
Konstruktion (1) Rita halvcirkel på $AB = c$ som diameter. Rita cirkel med medelpkt i A och radie h_a; den skär halvcirkeln i A_1. Drag linje, parallell med AB, på avstånd h_c från AB, p.s.s. som halvcirkeln. Linjen BA_1 skär denna linje i C.

Bevis Följer direkt ur konstruktionen

Utredning. För att det ske finnas lösning krävs att $h_a \leq c$. För $h_a = c$ är sidan $BC \perp AB$.

(2) Analys

Givet c, h_a, h_b



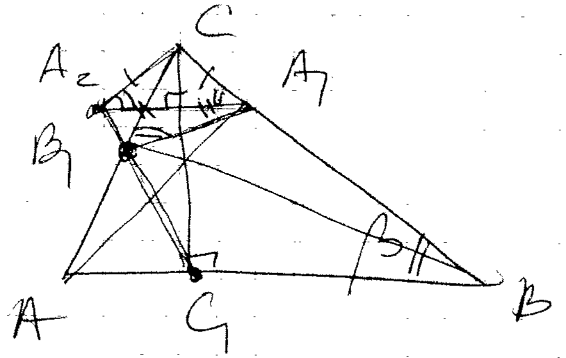
$A_1, B_1 \in$ halvcirkeln från (1)

Konstruktion. Som ovan fås A_1 och B_1; linjerna BA_1 och AB_1 skär varandra i C.

Bevis. Följer ur konstruktionen.

Utredning. Som förut krävs att $h_a \leq c$, $h_b \leq c$, dock får ej både samtidigt vara $= c$ (två räta vinklar kan inte finnas i en triangel).

(3.)



$A_1A_2 \perp CC_1 \Rightarrow A_1A_2 \parallel AB$

$\Rightarrow \sphericalangle A_2A_1C = \sphericalangle ABC = \beta$

$CA_2 = CA_1 \Rightarrow \sphericalangle CA_2A_1 = \sphericalangle CA_1A_2 = \beta$

$\triangle AA_1C \sim \triangle BB_1C \quad (v-v)$

$\Rightarrow \frac{CA_1}{CB_1} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow \frac{CA_1}{CA} = \frac{CB_1}{CB}$

$\Rightarrow \triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC \quad (s-v-s)$

$\Rightarrow \sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle CBA = \beta$

$\sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle CA_2A_1 \; (=\beta)$

$\Rightarrow$ fyrhörningen $A_1CA_2B_1$ inskriven

$\Rightarrow \sphericalangle A_2B_1C = \sphericalangle A_2A_1C = \beta$

$\Rightarrow \sphericalangle A_2B_1C = \sphericalangle C_1B_1A$ vertikalvinklar

$\Rightarrow A_2, B_1, C_1$ ligger på en rät linje

(4.) Medianernas skärningspkt är triangelns tyngdpkt; den delar varje median i förhållande 2:1, räknat från hörnet.

De tre bisektriserna skär varandra i inskrivna cirkelns medelpkt; de tre mittpunktsnormalerna i omskrivna cirkelns medelpkt; de tre höjderna skär varandra i en pkt.

(5.) (1) Kontinuitet. (2) Ja, den används. (3) Man kan t.ex. upptäcka fel om man gör en undersökning och det visar sig att dimensionerna inte stämmer.

---

(6) Rätt svar är (d).

Enklast är att eliminera de felaktiga svaren genom att titta på specialfall, t.ex. kvadrat och rektangel.

Om man vet att en olikhet gäller för alla icke-inskrivna fyrhörningar så räcker det återigen att titta på ett specialfall. Ta en romb med vinkel 60°, sidorna = korta diagonalen = a, långa diagonalen = $a\sqrt{3}$

$$a \cdot a\sqrt{3} < a \cdot a + a \cdot a$$

$\Rightarrow$ den rätta olikheten är

$$AC \cdot BD < AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$

(7.) Man kan betrakta "basen" i triangeln (som är en sträcka) både som en "tvåhörning" i dimension 1, och som en "cirkelskiva" på linjen.

$A = \frac{b \cdot h}{2}$, $V = \frac{Bh}{3}$ (B basens area)

$\dim = 4$: $V = \frac{Bh}{4}$ (B basens 3-volym)

---

(8) Konstruktioner & motsägelsebevis.