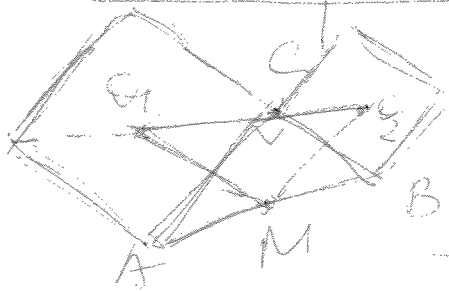


Ämnesdidaktisk problemlösning

Lösningar 25/8-12

①



CO_1 del av

BD diagonal i kvadraten

$$\Rightarrow \angle ACO_1 = 45^\circ$$

Analogt $\angle BCO_2 = 45^\circ$

$$\Rightarrow \angle O_1CO_2 = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow C \in O_1O_2$$

Låt CD vara diagonal i kvadraten på sidan AC ; O_1 mittpunkt på CD .

$$\text{Vi har } \frac{CO_1}{O_1D} = \frac{BM}{MA}; CB \parallel DA (\perp AC)$$

$\Rightarrow O_1M \parallel CB$ enl. omvändningen till transversalsatsen

$$\Rightarrow O_1M \perp AC$$

Analogt $O_2M \parallel AC \Rightarrow O_1M \perp O_2M$

$$\Rightarrow \angle O_1MO_2 = 90^\circ$$

②



Analys: Diagonalerna

A a B i $ABCD$ står varandra i O , på mitten; om vi betecknar

$$AD = BC = b, \text{ får vi (WLOG } BD = b = \frac{1}{2}AC)$$

$$\triangle ACD: AD = AC = b; CD = \frac{b}{2}$$

$\Rightarrow$ vi kan konstruera en triangel $\sim \triangle ACD$ och utifrån den parallelogram $\sim ABCD$

2

1000



AB AB

(standard construction)

cirkelskiva)

Välj $\triangle ABC$ med $\angle B = 90^\circ$ (hög) AB , och
 D på strålen AD , s.a. $AB = a$, $AD = b$

Beweis: $ABCD$ Parallelogram, per
Konstruktion, $AB = a$

$$ABCD \sim ABC_1D_1 \quad (\text{onskalingning})$$

$$AD = BD = \frac{1}{2}AC$$

$$\Rightarrow AD = BD = \frac{1}{2} AC$$

Åttredning: $b_0^2, b_1, b_{1/2}$ uppfyller alltid triangelolikheten; problem B_1, G har sedan entydigt

→ AB, CD eindeutig bestimmt

Omskalning alltid möjlig $\Rightarrow$ J! lösning
(+ en till, kongruent med den
första, om man istället väljer
 $AC = AD = \frac{1}{2} BD$)


$$= 1 \quad (\text{ enligt Herons formel})$$

ΔABI

$$\Rightarrow AP = 1$$

$$\Rightarrow \angle AIB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ =$$

$$= 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle C) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C$$

De två tangenterna från en yttre pkt till en cirkel är lika långa; Dessutom bildas en kvadrat med diagonaler CA och sida $r =$ inskrivna cirkelns radie

$$S_{\triangle ABI} = 1 = \frac{1}{2} AB \cdot r = \frac{1}{2} \sqrt{10} \cdot r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{12}{5} \text{ (a-e.)}$$

(4b) enligt triangelolikheten

4

(5) (1) Fattas fallet då båda leden är jämna.

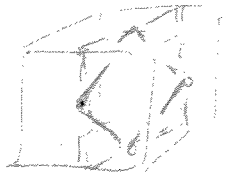
(2) Idén är att jämföra tal mod 2 och mod 4, och utnyttja att ett jämnt tal i kvadrat $\equiv 0 \pmod{4}$

(3) Man skulle t.ex. kunna minska antalet fall genom att välja konkret tal för b och låta endast a variera.

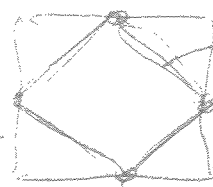
(6) Rätt svar: 15d, 16c

I en rätvinklig triangel med hypotenusa 1 och en spetsig vinkel x är kateterna just $\sin x$ och $\cos x$, det är ändå inte samma fråga, eftersom $0 < a, b < 1$ i fråga 16, medan $0 \leq \sin x, \cos x \leq 1$ i fråga 15

(7)



Betrakta det markerade snittet:



oktaedrens kant
 $= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$

Oktaedrens sidor är 8 liksidiga trianglar; om man binder samman deras centra fås en kub; kuben och oktaedren är alltså varandras dualer.