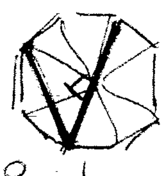
MVE365 Ämnesdidaktisk problemlösning MPLOL

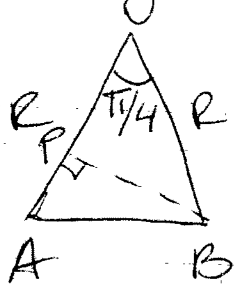
Lösningar 14/3-2013

1.



Låt R vara den omskrivna cirkelns radie. Då har den längsta diagonalen längden $2R$ och den kortaste $R\sqrt{2}$ (eftersom den är hypotenusa i en rätvinklig triangel med kateter R) Produkten är alltså $2R^2\sqrt{2}$.

Den regelbundna åttahörningen består av åtta likbenta trianglar med



toppvinkel $\frac{\pi}{4} = 45°$

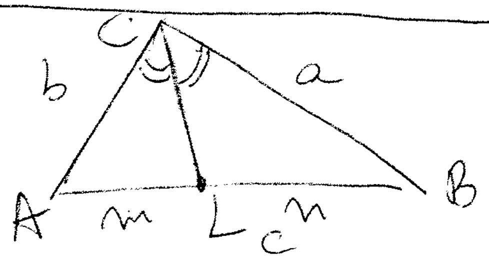
Höjden mot benet är alltså $\frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ (eftersom $\triangle PBO$ är rätvinklig med hypotenusa R och spetsiga vinklar $45°$)

Åttahörningens area är då

$$\overset{2}{\cancel{8}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} R \cdot \frac{R\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 2R^2\sqrt{2} =$$

= produkten av längsta och kortaste diagonalen.

2.



Givet: $\angle ACB = \gamma$

$AL = m$, $BL = n$

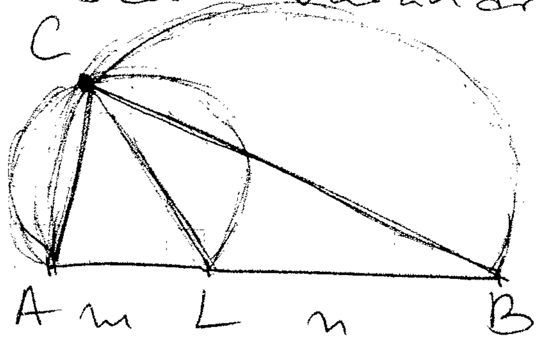
$(\angle ACL = \angle BCL)$

(2)

<u>Analys</u> Sträckan AB syns under vinkel γ från C.

Sträckorna AL och BL syns under vinkel $\gamma/2$ från C (ty CL bisektris).

<u>Konstruktion</u> Drag $AB = m+n$, sätt ut L s.a. $AL = m$, $BL = n$. Rita cirkelbågen från vilken AB syns under vinkel γ (grundkonstruktion) samt cirkelbågen från vilken AL syns under vinkel $\gamma/2$; dessa skär varandra i C.



<u>Bevis</u> $AL = m$, $BL = n$ per konstruktion

$\measuredangle ACL = \frac{\gamma}{2}$, $\measuredangle ACB = \gamma$ — " —

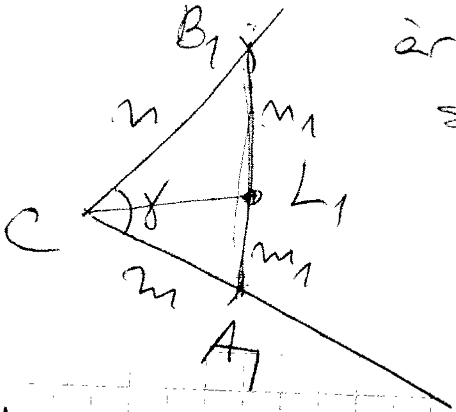
$\Rightarrow \measuredangle BCL = \measuredangle BCA - \measuredangle LCA = \gamma - \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$

$\Rightarrow$ CL bisektris

<u>Utredning</u> Det finns alltid en lösning (modulo kongruens), ty $\frac{\gamma}{2} < \gamma$ och cirklarna kommer att skära varandra.

<u>Skiss till alternativ lösning</u>: Bisektrissatsen ger $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$

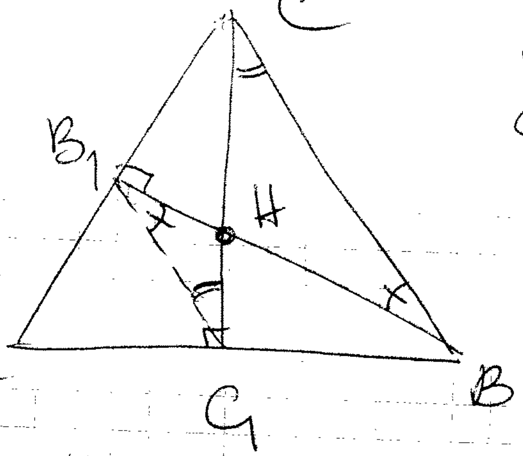
Konstruera en vinkel γ med spets i C, avsätt n på den ena axeln till B_1 och m på den andra till A_1. Triangeln A_1B_1C är då likformig med den sökta. Drag CL_1 bisektris till $\measuredangle C$;



$A_1L_1 = m_1$, $B_1L_1 = n_1$

Vi har $\frac{m_1}{m} = \frac{n}{b}$, och med m, m_1 kände kan vi konstruera $b = CA$.

3.



$BB_1 \perp AC$, $B_1 \in AC$
$CG \perp AB_1$, $G \in AB$
$BB_1 \cap CG = \{H\}$
$$\frac{BH}{HB_1} = \frac{CH}{HG} = \frac{2}{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{HG}{HB_1} = \frac{HC}{HB} \\ \measuredangle B_1HG = \measuredangle BHC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BHC \sim \Delta B_1HG$$
(s–v–s)

$\Rightarrow B_1G \parallel BC$ (enl. omvändningen till topptriangelsatsen) och $\measuredangle HB_1G = \measuredangle HBC$
$\measuredangle HGB_1 = \measuredangle HCB$

BCB_1G inskriven (ty B_1 och G ligger båda på en halvcirkel med diameter BC)

$\Rightarrow \measuredangle GB_1B = \measuredangle GCB \Rightarrow \Delta HB_1G$ och ΔHBC likbenta
($\forall = \forall$)

$\Rightarrow HG = \frac{1}{2}HC = \frac{1}{2}HB$

$\Rightarrow \measuredangle GBH = 30^\circ$, $\measuredangle GHB = 60^\circ$

$\Rightarrow \measuredangle BHC = 120^\circ \Rightarrow \measuredangle HBC = 30^\circ$

$\Rightarrow \measuredangle ABC = 60^\circ$

på samma sätt: $\measuredangle ACB = 60^\circ$

$\Rightarrow$ alla vinklar i $\triangle ABC$ är 60°

$\Rightarrow \triangle ABC$ liksidig

(Anmärkning: Det räcker att $\frac{AH}{HA_1} = \frac{BH}{HB_1} = \frac{CH}{HC_1}$ för att få resultatet; man (måste) kan då använda att

$\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ (ty B_1, C_1 fotpunkter till höjderna)

$\triangle AC_1B_1 \sim \triangle ABC$ (ty $B_1C_1 \parallel BC$)

$\Rightarrow \triangle AB_1C_1$ likbent $\Rightarrow \triangle ABC$ likbent etc)

---

4. Det kan inte vara (c), ty man skulle få $m_c = 0$ om $a = b = c$.

Det kan inte vara (b), ty formeln måste vara symmetrisk m.a.p. a och b.

Det kan inte vara (d), ty för en rätvinklig triangel med hypotenusa c skulle det ge $m_c = c$, medan vi vet att $m_c = \frac{1}{2}c$ i det fallet.

$\Rightarrow$ rätt svar är (a)

(5.) Idén är att faktorisera uttrycket. För att det ska vara ett primtal måste en av faktorerna vara +1 eller −1 och vi får ekvationer för n.

Enklare variant: t.ex. n^2-9

$n^2 - 9 = (n-3)(n+3)$

$n-3 = \pm 1$ ger $n=2$ eller $n=4$

$n+3 = \pm 1$ går inte

$n=2$: $4-9 = -5 < 0$ går inte

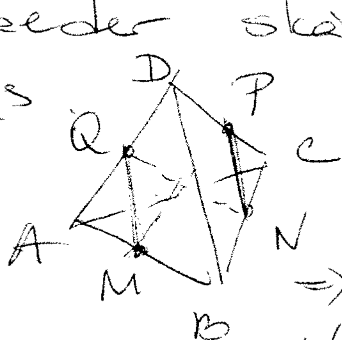
$n=4$: $16-9 = 7$ OK

(6.) Strategi: att använda extremfall

Nej, problemet är inte löst. Bara för att påståendet är sant i de två extremfallen behöver det inte vara sant i alla fall emellan.

(7.) Sträckorna som sammanbinder motstående kanters mittpunkter i en tetraeder skär varandra i en punkt.

Bevis



M, N, P, Q mittpunkter på AB, BC, CD, DA

$\Rightarrow MQ \parallel BD$, $MQ = \frac{1}{2} BD$

$NP \parallel BD$, $NP = \frac{1}{2} BD$

$\Rightarrow MNPQ$ parallellogram

⇒ MP och NQ skär varandra på mitten ; p.s.s. för det tredje paret kanter
(beviset är alltså exakt samma som i planet)

---

8. (a) Om de två sträckorna är sidor i en triangel, så kan man visa att vinkeln mot den ena är större än den mot den andra.
(b) Man kan inkludera dem i likformiga trianglar och härleda proportionalitetskoefficienten ur ett annat sidpar.
(c) Korda och diameter i en cirkel.
(d) Triangelolikheten
...