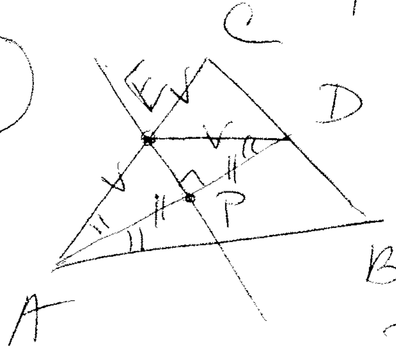
MVE365 Problemlösning och lärande

Lösningar 11/3-14

①



$D \in BC$:
AD bisektris till $\measuredangle A$
E mittpkten på AC
P mittpkten på AD

Givet: $EP \perp AD$

E $\in$ mittpktsnormalen $\Rightarrow EA = ED$
(till AD)

$\Rightarrow \measuredangle EDA = \measuredangle EAD$ enl. basvinkelsatsen

AD bisektris $\Rightarrow \measuredangle BAD = \measuredangle EAD$

$\Rightarrow \measuredangle EDA = \measuredangle BAD$

$\Rightarrow ED \parallel AB$ (lika alternatvinklar)

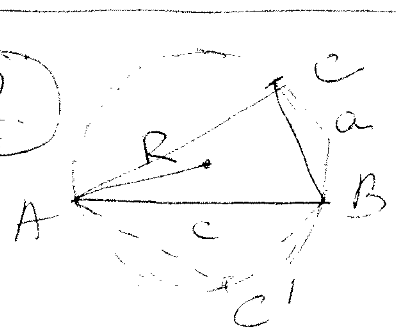
$\Rightarrow CE : CA = CD : CB = 1:2$
enl. transversalsatsen

$\Rightarrow$ D mittpkt på BC

Enligt bisektrissatsen $BD : BA = CD : CA$
$BD = CD \Rightarrow AB = AC$
$\Rightarrow \triangle ABC$ likbent

---

②



Givet: R, $AB = c$, $BC = a$
Utan inskränkning $c \geq a$.
Analys: allt är klart.

Konstruktion: Rita en cirkel med radie R.

Välj A på cirkeln; rita cirkel med radie c och medelpkt i A; den skär den första cirkeln i B. Rita cirkel med radie a och medelpkt i B; den skär den första cirkeln i C. Drag sträckorna mellan A, B, C.

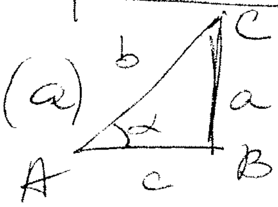
2.

Bevis: Följer direkt ur konstruktionen.

Utredning: Ingen lösning för $c > 2R$. Cirkeln med medelpkt i B kommer att skära den första cirkeln i två pkter, C och C'. Om $a = c$, så kommer $C' = A$ och det finns en lösning. Om $AB = c = 2R$ (diameter), så gäller $\angle C = \angle C' = 90^\circ$ och $\Delta ABC \cong \Delta ABC'$ ("IV" kongruensfallet), alltså $\exists$ en lösning. Om $c < 2R$, så är en av vinklarna $\angle C$ och $\angle C'$ spetsig och den andra trubbig $\Rightarrow \exists$ två icke-kongruenta lösningar.

---

3. (a)



$\angle A = \alpha < 90^\circ$

$(b^2 + c^2 > a^2$ uppenbart om $b > a$ eller $c > a$

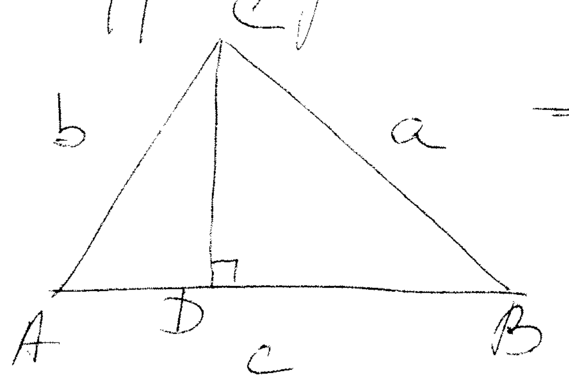
$\Rightarrow$ vi kan anta att α är största vinkeln i ΔABC) ($\Rightarrow$ alla tre vinklarna är spetsiga)

($\Rightarrow 60^\circ < \alpha < 90^\circ$) behövs inte här, men bra slutsatser

3

Triangeln har minst en spetsig vinkel till ; utan inskränkning vid B

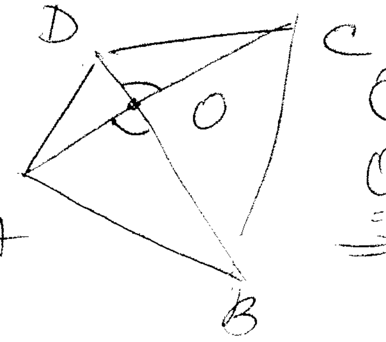
$\Rightarrow$ fotpunkten D till höjden från C ligger på sidan AB (mellan A o B)



$\Rightarrow a^2 = BD^2 + CD^2 <$

$< AB^2 + AC^2 = c^2 + b^2$

(b)



① Antag vinklarna vid O räta ; enl. Pythagoras sats

$$\Rightarrow \begin{array}{l} AB^2 = AO^2 + OB^2 \quad + \\ CD^2 = CO^2 + DO^2 \\ \hline AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} BC^2 = BO^2 + CO^2 \\ DA^2 = DO^2 + AO^2 \\ \hline BC^2 + DA^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$$

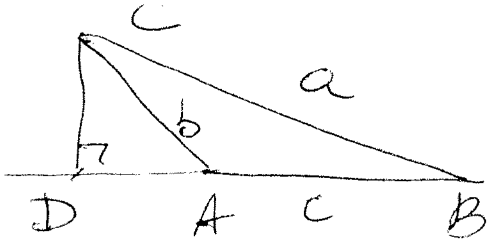
② Antag att $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

Antag vinklarna vid O ej räta

$\Rightarrow$ ett par vertikalvinklar är spetsiga, utan inskränkning $\angle AOB = \angle COD$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 < AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$ (a)

Vi behöver motsvarigheten till (a) för trubbig triangel.



D är nu utanför AB

$a^2 = BD^2 + CD^2 =$

$= (BA + AD)^2 + CD^2 = BA^2 + \underbrace{AD^2 + CD^2} +$

$+ \underbrace{2\,BA \cdot AD}_{>0} = c^2 + b^2 + \underbrace{\blacksquare}_{>0} > b^2 + c^2$

$\Rightarrow$ i fyrhörningen $BC^2 + DA^2 >$
$> AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 > AB^2 + CD^2$

Motsägelse

$\Rightarrow$ vinklarna vid O är räta

---

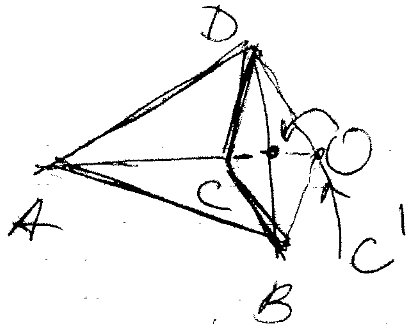
5. (1) Uppskattningar; dela upp i fall
(2) Man kan säga från början att antalet är jämnt/udda
Man kan variera procentsatsen (kan bli mycket jobbigare)
(3) Kanske att det är så stor skillnad i antal i båda fallen.

---

6. 17 b ; 18 d
Det vanligaste felet var att man svarade 18a, men vi vet inte vilken båge $\overset{\frown}{AC}$ pkten B ligger på. Problemet är att man missar ett fall, eller, mer generellt, att man tar saker för givet som inte är givna.

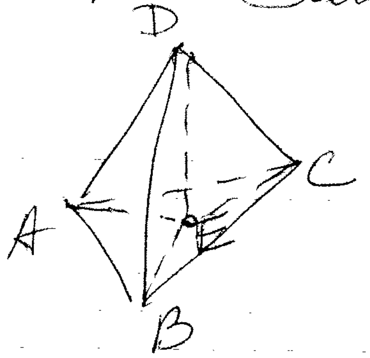
7. Man kan släppa kravet på att fyrhörningen är konvex, eller formulera påståendet för fyra pkter som inte ligger i ett plan:

Kanterna AC och BD är vinkelräta om ... (alltså för en tetraeder)



icke konvex: om diagonalen BD är utanför spegla C till C' i BD och använd påståendet för ABC'D - konvex.

Sant!



DE höjd i tetraedern

$AC \perp BD \Leftrightarrow AC \perp BE$

$$AB^2 + \underbrace{CE^2 + DE^2}_{= CD^2} = BC^2 + \underbrace{AE^2 + DE^2}_{= AD^2}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + CE^2 = BC^2 + AE^2$$

Sant!