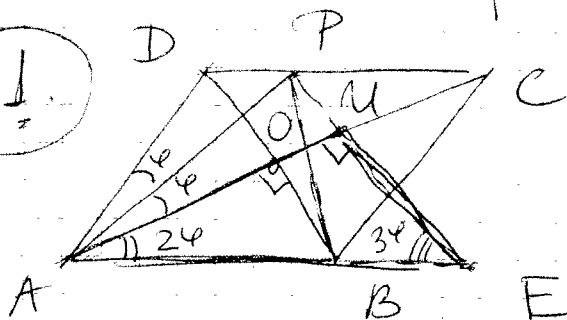
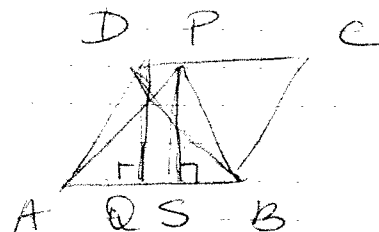


Problemlösning och lärandeLösningar 15/3-16

(a)



Drag höjder PS
 och DQ från P & D till AB.
 $\triangle APS \cong \triangle BDQ$ (två sidor
 & vinkel mot den större av dem)
 $\Rightarrow AS = BQ \Rightarrow AQ + QS = BS + SQ$
 $\Rightarrow AQ = BS$
 $\Rightarrow \triangle AQD \cong \triangle BSP$ (s-v-s)
 $\Rightarrow AD = BP$

(för att dra slutsatsen att
 $DQ = PS$ har vi använt att $AB \parallel PD$)

(b) Parallellförflytta BD till PE, $E \in \text{linjen AB}$
 $AP = BD = PE \Rightarrow \triangle AEP$ likbent

$$\Rightarrow \angle PAE = \angle PEA$$

Beteckna $\angle CAP = \varphi \Rightarrow \angle PAD = \varphi$

Diagonalerna i romben är bisektriser

$$\Rightarrow \angle CAB = 2\varphi \Rightarrow \angle PAE = \angle PEA = 3\varphi$$

$$PE \cap AC = \{U\}$$

Diagonalerna i romben är ortogonala; $PE \parallel BD$

$$\Rightarrow PE \perp AC \Rightarrow \angle U \text{ rät} \Rightarrow 2\varphi + 3\varphi + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 18^\circ \Rightarrow \text{vinklarna i romben } 72^\circ \text{ och } 108^\circ$$

(b) Alternativ lösning:

2

Vi använder (a): $\triangle ABD \cong \triangle BAP$
(s-s-s)

$$\Rightarrow \angle ABD = \angle BAP = 3\varphi$$

$$BD \cap AC = \{O\}; \quad BD \perp AC$$

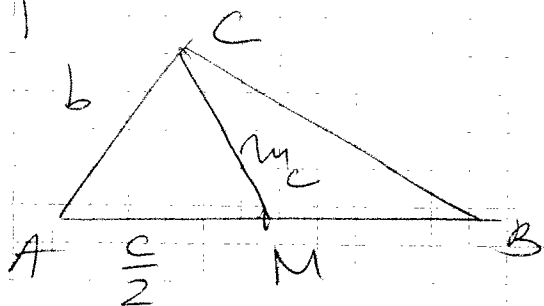
$$\Rightarrow \triangle ABO \text{ rätvinklig} \Rightarrow 2\varphi + 3\varphi + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 18^\circ$$

2.

Det finns två fall: (1) medianen går till en av de givna sidorna och (2) medianen är från det gemensamma hörnet.

(1)



Givet: b, c, m_c

Analys: Antag att $\triangle ABC$ är konstruerad.

M mittpunkt på AB

$\Rightarrow \triangle AMC$ konstruerbar ($AM = \frac{c}{2}$, $MC = m_c$, $CA = b$)

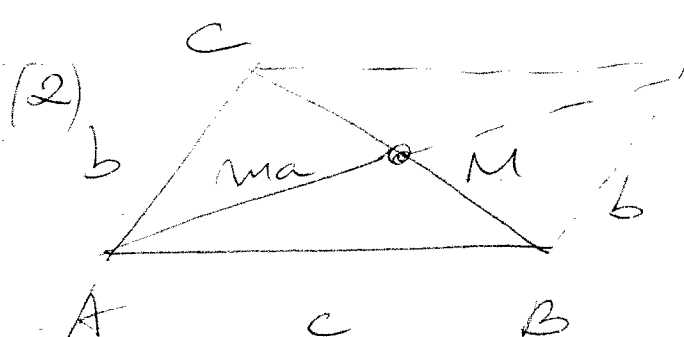
Konstruktion: Konstruera $\triangle AMC$

Förläng AM till AB, $MB = MA = \frac{c}{2}$, $B \neq A$

Beris: $AB = 2 \cdot \frac{c}{2} = c$, $AC = b$,

CM median, ty $AM = BM$, $CM = m_c$

Utredning: Krävs att $b, \frac{c}{2}, m_c$ uppfyller triangelolikheten ($b + \frac{c}{2} > m_c$, $b + m_c > \frac{c}{2}$, $m_c + \frac{c}{2} > b$)



(3)
 Givet: b, c, m_a
 Analys: M mittpunkt

För läng $AM \parallel AP$,
 $AM = MP$, $P \neq A$

$\Rightarrow ABPC$ parallelogram
 $\Rightarrow BP = b$

$\Rightarrow \Delta ABP$ konstruerbar

($AB = c$, $BP = b$, $AP = 2m_a$)

Konstruktion: Konstruera ΔABP

Hitta M mittpunkt på AP

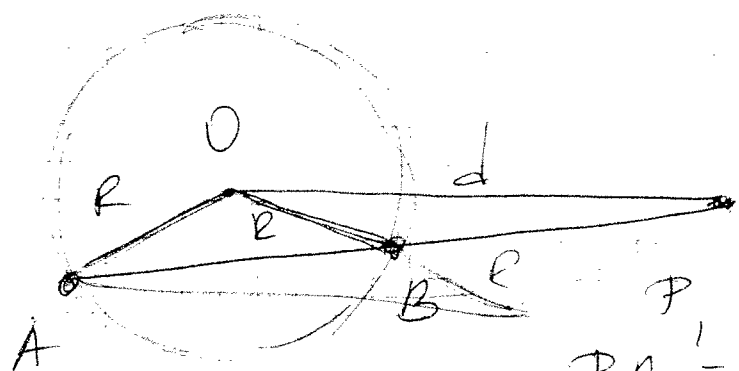
För läng $BM \parallel BC$, $MC = MB$, $C \neq B$

Bevis: Diagonalerna i $ABPC$

halverar varandra $\Rightarrow ABPC$ parallelogram
 $\Rightarrow AC = BP = b$

Utredning: Körs att $b, c, 2m_a$
 uppfyller triangelolikheten.

(3)



$PO = d$
 $A, B \in \text{cirkeln}$
 P, B, A i linje
 $PA = 2PB$

($AB = PB$)

$OA = OB = R$. Se fall två i
 uppgiften ovan, triangelolikheten ska

uppfyllas för $R, d, 2R$.

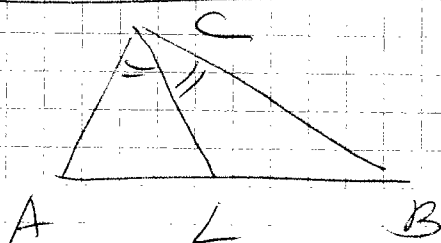
④

Givet är att $d > R$; $2R > R$
 $\Rightarrow$ kravet är $\boxed{3R > d}$

Anmärkning: Uppgifter 2 o 3 kan lösas algebraiskt, t. ex.

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

④b



$$\angle ACL = \angle LCB = \frac{1}{2} \angle ACB$$

$L \in AB$

$$\frac{AL}{AC} = \frac{BL}{BC}$$

trianglarna ALC och LBC har
gemensam höjd h_c från C

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ALC}}{AC} = \frac{S_{\triangle BLC}}{BC} \quad (\text{vi har förlängt med } h_c)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ALC}}{S_{\triangle BLC}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

⑤ (1) Ja. (2)(3) Nej; man har gjort
tröfel som tagit ut varandra;
kvaderat utan att bekymra sig
om tecken, och dividerat med x
som skulle kunna vara 0. (4) Nej.
(5) Mer, man skulle bara gjort ett fel.

6

Lätt svar är (b).

5

Man eliminerar felaktiga (lösningar) svar från en lista.

Det kan man göra genom att kolla för konkreta triangeltyper:

$$\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 90^\circ$$

(a) v.l. = 2 ; h.l. = $1 + \sqrt{2}$ $\rightarrow$ fel

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$$

(c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$? följer inget

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ — " —

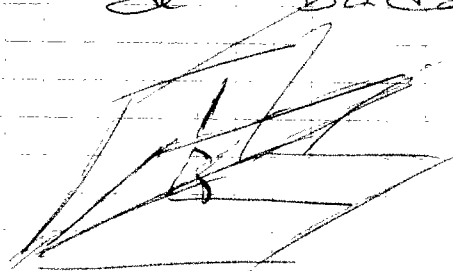
(d) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 1 - \cancel{\frac{1}{4}} \cdot \cancel{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ etc

$\Rightarrow$ (d) fel

7

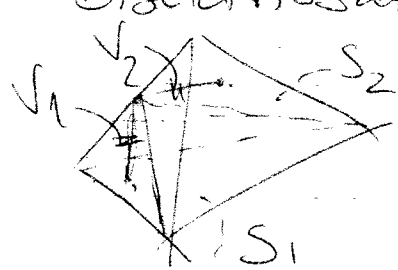
Det är bisektrisplanet mellan de båda planen.



Om man "riter" ett plan $\perp$ skärningslinjen och tar bisektorn till

den vinkel som bildas, så går bisektrisplanet genom den bisektorn och skärningslinjen.

"Bisektrissatsen"



(1) Tetraedern delas i två tetraedrar, vars volymer förhåller sig som "basernas" areor.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$$



"Basis": höjderna mot Δ med area S_1 och den med area S_2 är lika stora.

(2) Kantbitarna som motsvarande kant delas i förhåller sig till varandra som triangelarnas areor.

"Basis": Titta istället på tetraederns volymer med bas den gemensamma triangeln.