MVE365
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Problemlösning och lärande, MPLOL
Datum: 2015-03-17, 8:30-12:30
Telefonvakt: Éva Fülöp, tel. 070-945 00 56, besöker salen ca 10:00, svarar på frågor i telefon resten av tiden
Hjälpmedel: Inga (det är dock tillåtet att använda passare och linjal).
==

Del 1: Geometri

1. Cirklarna $k_1(O_1, r_1)$ och $k_2(O_2, r_2)$ tangerar varandra externt i punkten A (d.v.s. A är den enda gemensamma punkten för de två cirkelskivorna). Linjen t tangerar cirklarna k_1 och k_2 i punkterna B och C, respektive ($B, C \neq A$). Visa att $\triangle ABC$ är rätvinklig. (6p)

2. Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Punkten P är en godtycklig punkt på cirkeln. Visa att produkten av avstånden från P till AB och CD är lika med produkten av avstånden från P till BC och DA. (6p)

3. Konstruera en triangel givet en sida, höjden mot den och radien till den inskrivna cirkeln. (6p)

4.(a) Visa att de tre bisektriserna i en triangel skär varandra i en punkt. Vad är det som karakteriserar den punkten? (6p)

(b) Beräkna längden av sträckorna, i vilka triangelns sidor delas av tangeringspunkterna med den inskrivna cirkeln. (6p)

Trigonometri, vektorer, koordinatgeometri och komplexa tal får ej användas.

Del 2: Strategier och metoder

5. Läs noga igenom uppgiften och dess lösning och svara på frågorna som ställs längre ner. Uppgiften ger max 5p.

Givet triangeln ABC, beteckna med A_1 och B_1 fotpunkterna till höjderna från hörnen A och B, respektive. Punkten M är mittpunkt på sidan AB. Bestäm vinkeln $\angle A_1MB_1$.

Lösning: Sträckorna A_1M och B_1M är medianer mot hypotenusan AB i de rätvinkliga trianglarna ABA_1 och ABB_1. Därmed gäller $A_1M = B_1M = \dfrac{1}{2}AB$, och trianglarna AMB_1 och BMA_1 är likbenta. För vinkeln $\angle A_1MB_1$ får vi $\angle A_1MB_1 = 180° - (180° - 2\alpha) - (180° - 2\beta) = 180° - (360° - 2\alpha - 2\beta) = 180° - 2\gamma$.

Frågor: (1) Anser du att uppgiften är löst? *(2)* Om inte, vad är lösningens brister? *(3)* Kan du variera uppgiften?

6. Ur *Matematik- och fysikprovet 2014*: Markera rätt svar nedan.

20. En fyrhörning kallas *inskriven* om det finns en cirkel som går genom dess fyra hörn. Om fyrhörningen $ABCD$ (med sidor AB, BC, CD, DA och diagonaler AC, BD) är inskriven, så gäller att

(a) $|AB| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD| - |CD| \cdot |DA|$;
(b) $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| - |BC| \cdot |DA|$;
(c) $|AB| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD| + |CD| \cdot |DA|$;
(d) $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

Vilket svar är rätt? Förklara hur du tänker när du löser problemet, även om du inte kommer ända fram. (max 4p)

7. *ANALOGI:* Mängden av alla punkter i planet som befinner sig på lika avstånd från två givna punkter är en rät linje (mittpunktsnormalen till sträckan mellan punkterna). Beskriv dels mängden av alla punkter i rummet som befinner sig på lika avstånd från två givna punkter, dels mängden av alla punkter i rummet som befinner sig på lika avstånd från tre givna punkter. Skissa bevis för dina påståenden (endast principiellt, utan detaljer). (max 4p+4p)

8. Nämn två lösningsstrategier som du tycker ofta överlappar. Ge ett exempel. (max 3p)

/JM