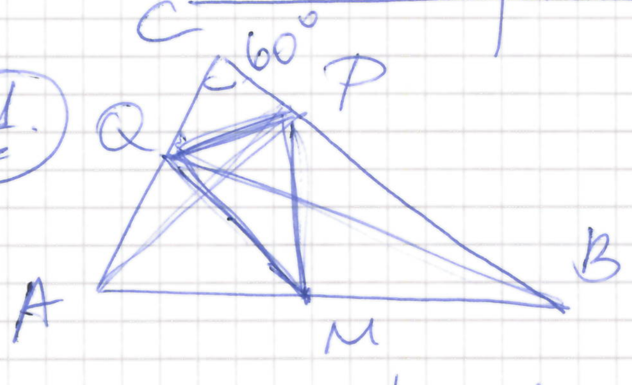
MVE365 Problemlösning och lärande

Lösningar 14/3-17

(1.)



$\angle C = 60°$

$AM = BM$

$AP \perp BC$

$BQ \perp AC$

$\triangle APC$ rätvinklig, $\angle PAC = 30°$

$\Rightarrow PC = \frac{1}{2}$ hypotenusan $= \frac{1}{2} AC$

analogt $QC = \frac{1}{2} BC$

$\triangle PQC \sim \triangle ABC$, ty (s-v-s) | $\angle C = \angle C$, $\frac{CP}{CB} = \frac{CQ}{CA} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow PQ = \frac{1}{2} AB$

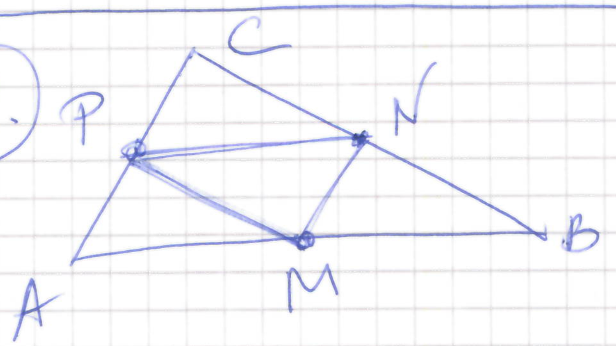
$\triangle APB$ rätvinklig, PM median mot hypotenusan $\Rightarrow PM = \frac{1}{2} AB$

analogt $QM = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow PQ = QM = PM = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow \triangle PQM$ liksidig

(2.)



M, N, P mittpkter på AB, BC, CA, respektive

Analys $\triangle PNC \sim \triangle ABC$, ty

$\sphericalangle C = \sphericalangle C$

$PC = \frac{1}{2} AC$, $NC = \frac{1}{2} BC$ (I l.f. s-v-s)

$\Rightarrow \sphericalangle PNC = \sphericalangle ABC \Rightarrow PN \parallel AB$

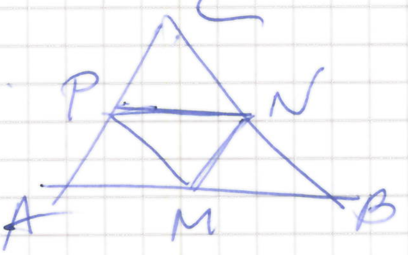
analogt visas $MN \parallel CA$, $PM \parallel BC$

Konstruktion: Drag MN, NP, PM.

Drag räta linjer genom M, N, P, parallella med NP, PM, MN, respektive.

Dessa linjer skär varandra i triangelns hörn.

Bevis



$AB \parallel PN$

$\Rightarrow \triangle PNC \sim \triangle ABC$

(topptriangelsatsen)

analogt $\triangle MNB \sim \triangle ACB$ | kongruens?

$\triangle MPA \sim \triangle BCA$

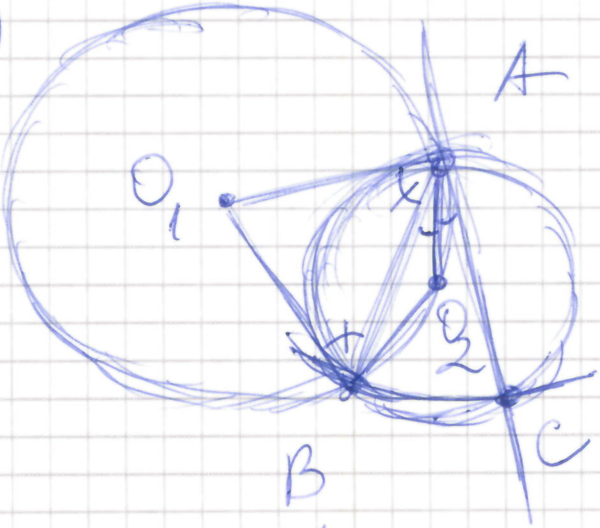
$$\left.\begin{array}{l} AM \parallel PN,\ AP \parallel MN \\ \Rightarrow AMNP \text{ parallellogram} \\ \Rightarrow AM = PN \\ MB \parallel PN,\ BN \parallel PM \\ \Rightarrow MBNP \text{ parallellogram} \\ \Rightarrow MB = PN \end{array}\right\} \Rightarrow AM = BM$$

$\Rightarrow M$ mittpkt på AB

analogt för övriga.

Utredning: Det som krävs är att M, N, P ej ligger i linje; i så fall bildar de en triangel och då kommer även de tre dragna linjerna att skära varandra i en triangels hörn.

3.



$k_1(O_1, R_1)$

$k_2(O_2, R_2)$

$O_2 \in k_1$

$k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$

$O_1A = O_1B = R_1$

$$\sphericalangle AO_2B + \underbrace{\frac{1}{2}\sphericalangle AO_1B}_{=\text{randvinkel på bågen } \overset{\frown}{AO_2B}} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \sphericalangle AO_2B = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle AO_1B =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle O_1AB) =$$

(enl. basvinkelsatsen)

$$= 90^\circ + \sphericalangle O_1AB$$

$AB = AC \Rightarrow O_2 \in$ bisektrisen till $\sphericalangle BAC$

$O_2A = O_2B = R_2 \Rightarrow \sphericalangle ABO_2 = \sphericalangle BAO_2 = \sphericalangle CAO_2$

$$\Rightarrow \sphericalangle AO_2B = 180^\circ - 2\sphericalangle BAO_2 = 180^\circ - \sphericalangle BAC$$

$$\hookrightarrow = 90^\circ + \sphericalangle O_1AB \Rightarrow \sphericalangle O_1AC =$$

$= \measuredangle Q_1AB + \measuredangle BAC =$

$= (180^\circ - \measuredangle \cancel{BAC}) - 90^\circ + \measuredangle \cancel{BAC} = 90^\circ$

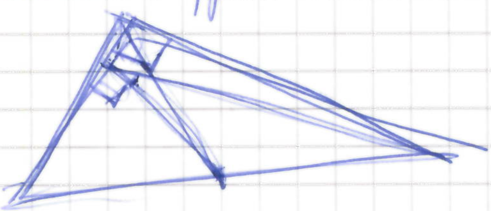
$\Rightarrow Q_1A \perp AC \Rightarrow$ linjen AC tangent till k_1 i A

4b Den räta vinkeln står på en halvcirkel med diameter hypotenusan.

Medianen mot hypotenusan är radie $\Rightarrow$ medianen $= \frac{1}{2}$ diametern

$\Rightarrow \ldots = \frac{1}{2}$ hypotenusan.

(Alternativt:



Om medianen $= \frac{1}{2}$ hypotenusan, så är triangeln rätvinklig (använd basvinkelsatsen).

Gör sedan ett motsägelsebevis m.h.a. yttervinkelsatsen.)

Svår

5. Två ekvationer med tre obekanta, man förväntar sig inte entydig lösning

h.l. $= 10 \Rightarrow 30 = \ldots \geq 36$

⇒ ingen lösning finns i det fallet.

Illustrerar extremfall (gränsen mellan "ingen lösning" och "flera lösningar)

---

6. rätt svar är (b)

Oftast förekommande fel: (a)

skrf/ Man blandar ihop en sats och dess omvändning. Det behövs logiska övningar, inte nödvändigtvis inom matematik.

7.

skrf/

Två varianter:

två icke-parallella snitt med ett plan; normalerna till planen genom centra kommer att skära varandra i sfärens medelpkt (båda normalerna ligger i planet som bestäms av de två cirklarnas medelpkter och sfärens medelpkt)

Alternativt: pkter på sfären, mittpktsnormalplan till sträckorna.