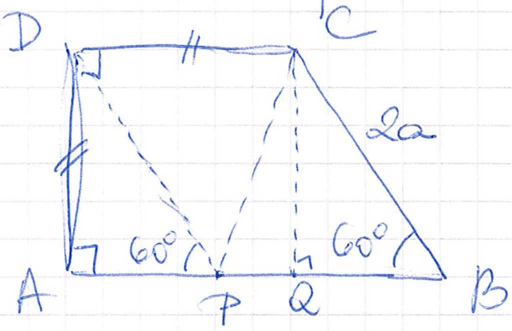
MVE365 Problemlösning och lärande

Lösningar 9/6-2017

1.



$DP \parallel BC$

$\Rightarrow \measuredangle APD = 60°$,
$\measuredangle ADP = 30°$

$\left.\begin{array}{l} \triangle APD \text{ rätvinklig} \\ \measuredangle ADP = 30° \end{array}\right\} \Rightarrow AP = \frac{1}{2} DP$

PBCD parallellogram (båda paren motstående sidor parallella)

$\Rightarrow DP = BC = 2a \Rightarrow AP = a$

$AD = \sqrt{DP^2 - AP^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3} = CD$

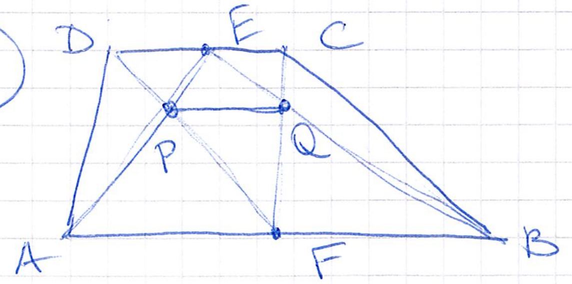
Låt $Q \in AB$: $CQ \perp AB$; $\measuredangle QBC = 60°$

$\Rightarrow BQ = \frac{1}{2} BC = a$, $PQ = BP - BQ =$
$= CD - BQ = a\sqrt{3} - a$

$\Rightarrow CP = \sqrt{PQ^2 + CQ^2} = \sqrt{a^2(\sqrt{3}-1)^2 + (a\sqrt{3})^2} =$
$= a\sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3} = a\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ omkretsen till $\triangle CPD = CD + DP + CP =$
$= a\sqrt{3} + 2a + a\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$

2.

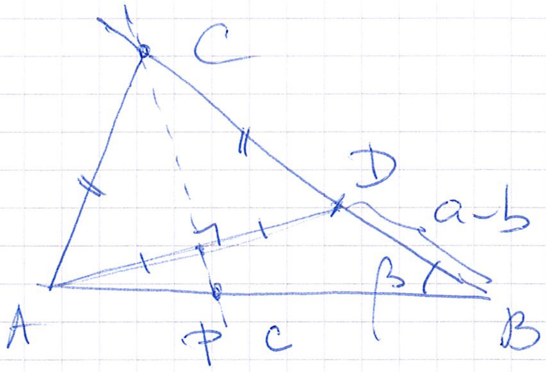


$\triangle DEP \sim \triangle FAP$ (topptriangelsatsen)
$\triangle CEQ \sim \triangle FBQ$

$\Rightarrow \frac{PE}{PA} = \frac{DE}{FA} = \frac{CE}{FB} = \frac{QE}{QB}$

$\Rightarrow \frac{PE}{PA} = \frac{QE}{QB} \Rightarrow PQ \parallel AB$ (omvändningen till transversalsatsen)

3.



<u>Analys</u>. $D \in BC$, D: $BD = a-b$, $DC = b$

$C \in$ strålen BD

$\triangle ADC$ likbent ($AC = DC$)

$\Rightarrow C \in$ mittpktsnormalen till AD

<u>Konstruktion</u>. Avsätt $AB = c$, avsätt vinkel β från strålen BA. Avsätt $BD = a-b$ på vinkelns andra axel.

Konstruera mittpktsnormalen till AD

C är skärningspunkten mellan strålen BD och mittpktsnormalen.

<u>Bevis</u> Låt $BC = a$, $AC = b$

$C \in$ mittpktsnormalen till AD

$\Rightarrow AC = DC = b \Rightarrow BD = a-b$

$AB = c$ och $\angle B = \beta$ per konstruktion

<u>Utredning</u> Det krävs att $a-b < c$ (triangelolikheten)

Det krävs dessutom att mittpktsnormalen och strålen BD skär varandra. Det kommer de att göra om $\beta < \angle APC$ ($P = AB \cap$ mittpktsnormalen till AD), vilket händer när fotpunkten till höjden från B i $\triangle ABD$ hamnar utanför AD, d.v.s. när $\angle ADB$ är trubbig.

4. Se Hanners kompendium, eller anteckningar.

---

5. ① Man diskuterar inte olika fall, pkten P kan hamna innanför sträckan AB, i pkten A, eller utanför AB. Avstånden blir $b\sin 2\alpha$; b; $b\sin(180^\circ - 2\alpha)$.
② Jag skulle ge 3p för den presenterade lösningen. ③ Många elever kan inte skilja på linje och sträcka; andra är osäkra på begreppet avstånd.

---

6. 18 c ; 19 a
Logaritmens egenskaper. För $0 < a < 1$ gäller $\ln a < 0$, så det handlar också om att göra en rimlighetskontroll.
Felaktiga svar: man inser inte att $\ln(\sqrt{2}-1) < 0$, eller att $\ln(\sqrt{2}+1) = -\ln(\sqrt{2}-1)$.
För sista frågan: räcker att ta två tal < 0.

---

7. En tetraeder med tre platta räta vinklar i ett hörn. Volymformeln motsvarar areaformeln för en rätvinklig triangel; areorna till triangelsidorna uppfyller "Pythagoras sats".

---

8. Man testar flera specialfall och försöker identifiera ett generellt mönster.