

Tentamensskrivning i matematik del A 20130118

Kurskod: LMA164

Telefonvakt: Emil Gustavsson tel. 0734 407926

Tid för tentamen: 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga

1. Lös olikheten $\frac{x+3}{x^2-4} < 0$ (4p)
2. Lös ekvationen $x|x-2| + |x+1| = 2$ (4p)
3. Beräkna $\operatorname{Im} z$ för det komplexa talet $z = \frac{1+j}{2+j} + \frac{1}{j}$. (4p)
4. Bestäm skärningspunkterna mellan cirkeln med centrum i $(-2, 1)$, radien $\sqrt{10}$ och linjen $y = 3x + 1$. (4p)
5. Förenkla uttrycket $\frac{x^2 + y\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ så långt som möjligt. (6p)
6. Bestäm de reella talen a och b så att ekvationen $2z^3 - 5z^2 + az + b = 0$ har roten $1 + 3j$ och lös ekvationen. (6p)
7. En triangel har hörn i punkterna $(1; 2)$ och $(3; 1)$ samt origo. Beräkna koordinaterna för den punkt där höjden från hörnet $(1; 2)$ möter basen (dvs den motstående sidan) i triangeln. Beräkna även höjdens längd. (6p)
8. Lös ekvationen $z^2 + (1 - 2j)z - 2 - 4j = 0$. (6p)
9. Ange och bevisa kuberingsreglerna (2p)
10. Visa att $z \cdot \bar{z}$ är reellt. (3p)
11. Härled parabelns ekvation med brännpunkten $(0, C)$. Rita figur! (5p)

Lösningar del A 20130118

①

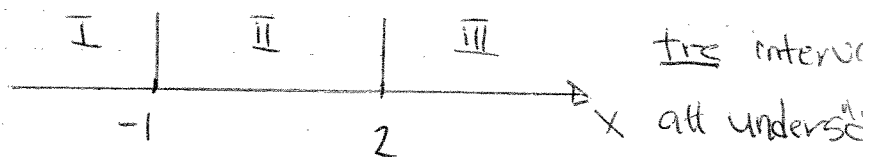
Tabell

x		-3		-2		2	
x+3	-	0	+	+	+	+	+
x-2	-	-	-	-	-	0	+
x+2	-	-	-	0	+	+	+
hela	-	0	+	ej def	-	ej def	+

Svar!

$$x < -3 \vee -2 < x < 2$$

② brytpunkter:



I. $x < -1$

$$-x(x-2) - (x+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - x - 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3}_{< 0}}$$

Lösning saknas

II. $-1 \leq x < 2$

$$-x(x-2) + (x+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + x + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{4}{4}}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ falskt!}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ok!}$$

III. $x \geq 2$

$$x(x-2) + (x+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + x + 1 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

båda falska!

③ $z = \frac{1+j}{2+j} + \frac{1}{j} = \frac{(1+j)(2-j)}{5} - \frac{j}{1} =$

$$= \frac{2-j+2j+1-5j}{5} = \frac{3}{5} + j\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Im } z = -\frac{4}{5}$$

④ Cirkel: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

Givet: $(x_0, y_0) = (-2, 1)$ och $R = \sqrt{10}$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 10 \quad (*)$$

Givet: $y = 3x+1$. Insättning i $(*)$ ger

$$(x+2)^2 + (3x+1-1)^2 = 10$$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{x^2 + 4x + 4 + 9x^2 - 10 = 0}$$

$$\stackrel{(\Leftrightarrow)}{10x^2 + 4x - 6 = 0}$$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} = 0}$$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{x = -\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{15}{25}}} \quad (\Rightarrow) \quad x = -\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5}$$

$$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -2 \Rightarrow (x_1, y_1) = (-1, -2)$$

$$x_2 = \frac{3}{5} \Rightarrow y_2 = 3 \cdot \frac{3}{5} + 1 = \frac{14}{5} \Rightarrow (x_2, y_2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

$$⑤ \quad \frac{x^2 + y\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x^2 + y\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}$$

$$= \frac{x^2 + y\sqrt{xy} - x(x + \sqrt{xy})}{x-y} = \frac{\cancel{x^2} + y\sqrt{xy} - \cancel{x^2} - x\sqrt{xy}}{x-y}$$

$$= \frac{\sqrt{xy}(y-x)}{x-y} = -\frac{\sqrt{xy}(x-y)}{x-y} = -\sqrt{xy}$$

$$(6) \quad z_1 = 1 + 3j \Rightarrow z_2 = 1 - 3j$$

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - z_2) &= (z - (1 + 3j))(z - (1 - 3j)) = \\ &= ((z - 1) - 3j)((z - 1) + 3j) = (z - 1)^2 - (3j)^2 = \\ &= z^2 - 2z + 1 + 9 = z^2 - 2z + 10 \end{aligned}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 2z - 1 \\ z^2 - 2z + 10 \overline{) 2z^3 - 5z^2 + az + b} \\ \underline{-(2z^3 - 4z^2 + 20z)} \\ -z^2 + (a - 20)z + b \\ \underline{-(-z^2 + 2z - 10)} \\ (a - 22)z + (b + 10) = 0 \end{array}$$

$$a = 22 \quad b = -10$$

$$\text{L\"os } 2z - 1 = 0$$

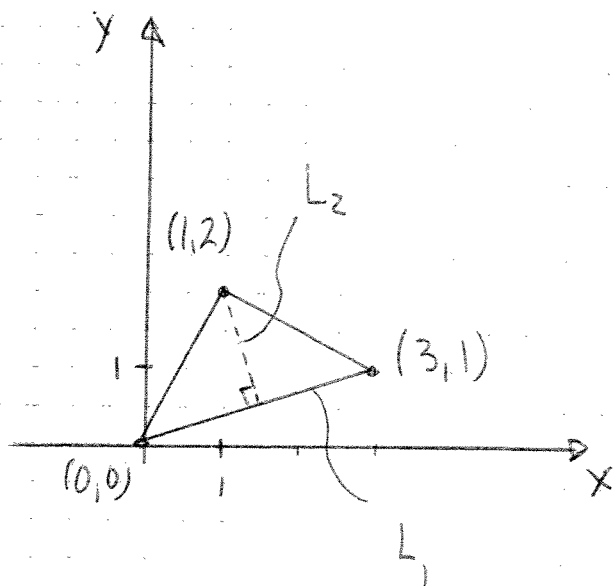
$\Rightarrow$

$$z = \frac{1}{2}$$

⑦ Rita figur!

$$L_1: k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}x$$



Vinkelräta linjer:

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$$

Vi vet en punkt på L_2 , nämligen $(1,2)$.
Insättning i punktsformeln ger

$$y - 2 = -3(x - 1)$$

$\Rightarrow$

$$y_2 = -3x + 5$$

Sökt punkt är skärningspunkten mellan
 L_1 och L_2 d.v.s. då

$$\frac{1}{3}x = -3x + 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$$

Höjden blir då

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ l.e.} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad z^2 + (1-2j)z - 2 - 4j = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(z + \left(\frac{1-2j}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{1-2j}{2}\right)^2 - 2 - 4j = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(z + \left(\frac{1-2j}{2}\right)\right)^2 - \frac{5}{4} - 3j = 0$$

Sätt: $z + \left(\frac{1-2j}{2}\right) = x + jy$ $\textcircled{*}$

$$\Rightarrow (x + jy)^2 - \frac{5}{4} - 3j = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$x^2 - y^2 + 2xyj - \frac{5}{4} - 3j = 0$$

Identifiering av realdel och imaginärdel ger

$$\begin{array}{l} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = \frac{5}{4} \\ 2xy = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{array}{l} (x_1, y_1) = \left(\frac{3}{2}, 1\right) \\ (x_2, y_2) = \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \end{array}$$

Insättning av (x_1, y_1) och (x_2, y_2) i $\textcircled{*}$ ger

$$z_1 + \left(\frac{1-2j}{2}\right) = \frac{3}{2} + j \Leftrightarrow z_1 = 1 + 2j$$

och

$$z_2 + \left(\frac{1-2j}{2}\right) = -\frac{3}{2} - j \Leftrightarrow z_2 = -2$$