

Tentamensskrivning i matematik del A 20131022

Kurskod: LMA164

Telefonvakt: Jonny Lindström tel. 0733 607040

Tid för tentamen: 08.30-12.30

Hjälpmedel: Inga

1. Lös ekvationerna

(a) $\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} - \frac{8}{x-1} = 0.$

(b) $\sqrt{2x^2 + 7x + 6} - x = 2.$ (6p)

2. Ekvationen $x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$ har en rot $x = 1$. Bestäm ekvationens övriga rötter. (4p)

3. Ange skärningspunkterna mellan linjen $y = x + 1$ och cirkeln med medelpunkt $(-2, 3)$ och radie 3. Rita figur! (4p)

4. Lös dubbelolikheten $x^2 + 2x - 4 \leq x - 2 \leq \frac{4}{x+1}.$ (7p)

5. Ekvationen $z^4 - z^2 + 2z + 2 = 0$ har en rot $z = 1 + j$. Bestäm ekvationens övriga rötter. (6p)

6. Lös ekvationen $jz^2 - 2z - 4jz + 6j = 0.$ (6p)

7. För vilka värden på konstanten k har ekvationen $|x+1| + |x-2| - 1 = kx$ exakt en lösning? (6p)

8. (a) Visa att $z \cdot \bar{z}$ är reellt. (2p)

(b) Härled lösningsformeln för en andragradsekvation, samt ange i vilket fall reella lösningar saknas. (4p)

(c) Härled parabelns ekvation med brännpunkten $(0, C)$. Rita figur! (5p)

$$\underline{1. a.} \quad \frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} - \frac{8}{x-1} = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \text{Matematik del A} \\ \text{LMA 164} \\ \text{22 oktober 2013} \end{array} \right]$$

$$(x \neq 2, -2, 1)$$

$$\frac{3(x+2)(x-1) + 7(x-2)(x-1) + 8(x^2-4)}{(x-2)(x+2)(x-1)} = 0$$

$$3(x^2+x-2) + 7(x^2-3x+2) + 8x^2-32 = 0$$

$$18x^2 - 18x - 24 = 0$$

$$x^2 - x - \frac{4}{3} = 0, \quad x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{3}} = \text{~~...~~ }$$

$$\underline{b.} \quad \sqrt{2x^2+7x+6} = x+2 \quad \left| \frac{1}{2} \pm \right.$$

$$\Rightarrow 2x^2+7x+6 = x^2+4x+4$$

$$x^2+3x+2=0, \quad x=-1 \text{ eller } -2$$

$$\text{Prövning: } x=-1 \text{ ger } \sqrt{2-7+6} = 1 \quad \text{OK}$$

$$x=-2 \text{ ger } \sqrt{8-14+6} = 0 \quad \text{OK.}$$

$$\boxed{x=-1 \text{ eller } -2}$$

$$\underline{2.} \quad x^3-5x^2+6x-2=0 \quad x_1=1 \text{ given}$$

$$(x-1)(x^2+ax+2)=0$$

$$x^2: -1+a=-5$$

$$a=-4$$

$$x: -a+2=6$$

$$x^2-4x+2=0 \text{ ger } x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$$

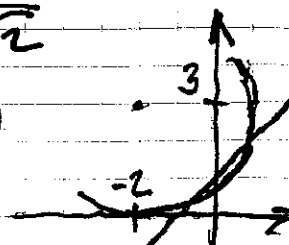
$$\underline{3.} \quad \begin{cases} y = x+1 & (\text{linje}) \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 9 & (\text{cirkel}) \end{cases}$$

$$\text{Ins. av linjen: } (x+2)^2 + (x-2)^2 = 9$$

$$x^2+4x+4 + x^2-4x+4 = 9, \quad 2x^2=1, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Linjens chw. ger sedan } y = 1+x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ resp. } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



$$4. \quad x^2 + 2x - 4 \leq x - 2 \leq \frac{4}{x+1}$$

Matematik del A
LMA 164
22 oktober 2013

Vänstra: $x^2 + x - 2 \leq 0$

$(x-1)(x+2) \leq 0$ V.L. matn. parabel $\begin{matrix} -2 & 1 \end{matrix}$

$-2 \leq x \leq 1$

Högra: $x - 2 - \frac{4}{x+1} \leq 0, \quad \frac{x^2 - x - 6}{x+1} \leq 0$

$\frac{(x-3)(x+2)}{x+1} \leq 0$

	-2	-1	3		
$x-3$	-	-	0	+	
$x+2$	-	0	+	+	
$x+1$	-	-	0	+	
Hela	-	0	+	-	0

$x \leq -2$ eller $-1 < x \leq 3$



Vänstra:

Högra:

Båda:

Svar: $x = -2$
eller $-1 < x \leq 1$.

5. $P(z) = z^4 - z^2 + 2z + 2 = 0, \quad z_1 = 1+j$ given

Reella koef. i $P(z)$ ger $z_2 = 1-j$

Divdera med $(z-z_1) \cdot (z-z_2) = (z-1)^2 + 1 =$
 $= z^2 - 2z + 2$

$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + az + 1)$

$z^3: a - 2 = 0 \quad a = 2$

$z^2: 1 - 2a + 2 = -1 \quad a = 2$

$z: 2a - 2 = 2 \quad a = 2$

$z_{3,4}$ fås ur $z^2 + 2z + 1 = 0 \quad (z+1)^2 = 0$

$z_{3,4} = -1$. (och $z_{1,2} = 1 \pm j$)

$$6. \quad jz^2 - 2z - 4jz + 6j = 0$$

Div. med j / mult. med $-j$:

$$z^2 + 2jz - 4z + 6 = 0$$

$$\left[z + (j-2) \right]^2 - (j-2)^2 + 6 = 0$$

$$w^2 = (j-2)^2 - 6 = -3 - 4j \quad \text{sätt } w = a + jb$$

$$w^2 = a^2 - b^2 + 2abj, \quad |w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2$$

Re: $a^2 - b^2 = -3$

Im: $2ab = -4$

Bel.: $a^2 + b^2 = 5$

ger $2a^2 = 2$
 $2b^2 = 8$

$a = \pm 1$
 $ab = -2$
 $b = \pm 2$

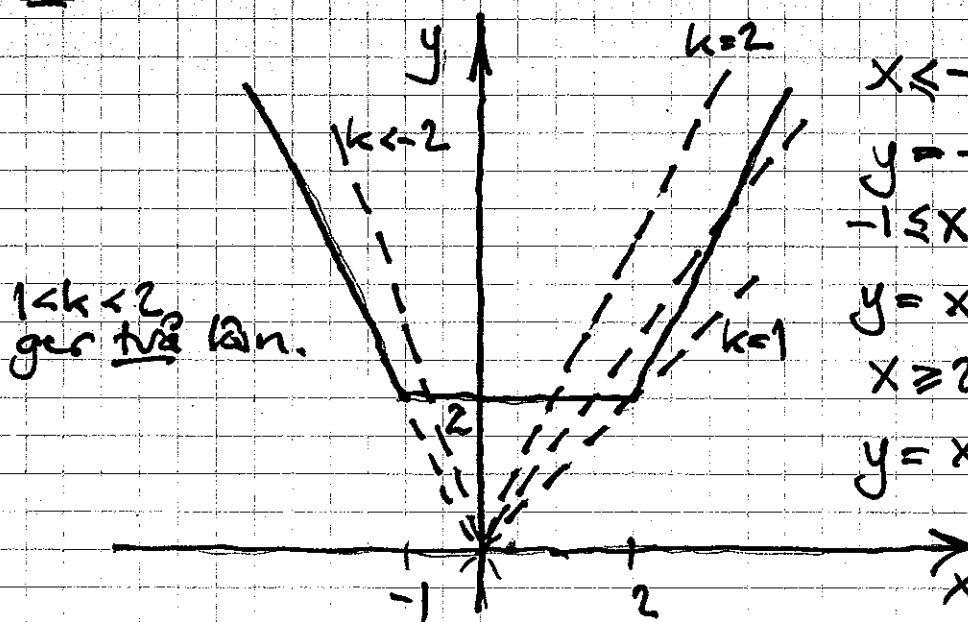
ger tecken

$$w_1 = 1 - 2j \quad w_2 = -1 + 2j$$

$$z_1 = w_1 - j + 2 = 3 - 3j$$

$$z_2 = w_2 - j + 2 = 1 + j$$

$$7. \quad |x+1| + |x-2| - 1 = kx \quad \text{Exakt en rot. Rita } y = \text{v.l.}$$



$x \leq -1$:

$$y = -x - 1 - x + 2 = -2x + 1$$

$-1 \leq x \leq 2$:

$$y = x + 1 - x + 2 - 1 = 2$$

$x \geq 2$:

$$y = x + 1 + x - 2 - 1 = 2x - 2$$

$$k \geq 2 \text{ eller } k = 1 \text{ eller } k < -2$$