Lösningsförslag till tentamen 29 okt 2014
Matematik, del A, för Tekniskt basår

1. Förenkla och skriv följande uttryck på så enkel form som möjligt

   (a) $\dfrac{\sqrt{6a^3}}{\sqrt[4]{4a^2}}$ (3p)

   Lösning: $$\frac{\sqrt{6a^3}}{\sqrt[4]{4a^2}} = \frac{(2\cdot 3a^3)^{1/2}}{(2^2a^2)^{1/4}} = \frac{2^{1/2}3^{1/2}(a^3)^{1/2}}{(2^2)^{1/4}(a^2)^{1/4}} =$$
   $$= \frac{2^{1/2}3^{1/2}a^{3/2}}{2^{1/2}a^{1/2}} = 3^{1/2}a^{3/2-1/2} = \sqrt{3}\,a$$

   Svar: $\sqrt{3}\,a$

   (b) $\dfrac{1-\frac{y^2}{x^2}}{(1+\frac{y}{x})^2}$ (3p)

   Lösning: $$\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{(1+\frac{y}{x})^2} = \frac{\frac{x^2-y^2}{x^2}}{(\frac{x+y}{x})^2} = \frac{\frac{x^2-y^2}{x^2}}{\frac{(x+y)^2}{x^2}} = \frac{x^2-y^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{(x+y)^2}$$
   $$= \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{x+y}$$

   Svar: $\dfrac{x-y}{x+y}$

2. Bestäm kvotpolynom och restpolynom då x^4+2x^3-x+5 delas med x^2-2x+3. (4p)

   Lösning: Divisionsalgoritmen uppställd med "trappan" ger att;

$$\begin{array}{r l}
 & \quad x^2 \quad +4x \quad +5 \\
x^2-2x+3 \,\big) & x^4+2x^3 \qquad\qquad -x \quad +5 \\
 & \underline{-x^4+2x^3-3x^2} \\
 & \qquad 4x^3-3x^2 \quad -x \\
 & \qquad \underline{-4x^3+8x^2-12x} \\
 & \qquad\qquad 5x^2-13x \quad +5 \\
 & \qquad\qquad \underline{-5x^2+10x-15} \\
 & \qquad\qquad\qquad -3x-10
\end{array}$$

   Svar: Kvotpolynomet är $K(x) = x^2+4x+5$
   och restpolynomet är $R(x) = -3x-10$

3. Lös ekvationen $2x = \sqrt{4x+3}$ (4p)

   Lösning: $2x = \sqrt{4x+3} \;\Rightarrow\; 4x^2 = 4x+3 \;\Leftrightarrow$
   $$x^2 - x - \tfrac{3}{4} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2} \pm 1$$
   Här är det ekvivalens i den första implikationen endast om $2x \geq 0$ dvs. $x \geq 0$, vilket endast är uppfyllt för roten $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

   Svar: $x = \frac{3}{2}$

4. Lös olikheten $|x-3| < |x+2|$ (3p)

Lösning: Enklast löser man denna olikhet genom att tolka båda absolutbeloppen som avstånd; $|x-3|$ är avståndet mellan x och 3 och $|x+2|$ är avståndet mellan x och -2. Om man på tallinjen markerar punkterna -2 och 3 så framgår det tydligt att de punkter x som ligger närmare 3 än -2 är de för vilket $x > \frac{1}{2}$.

Alternativt kan vi studera olikheten var för sig i de tre intervallen (I) $x < -2$, (II) $-2 \le x < 3$, (III) $x \ge 3$

(I) I detta intervall är $x-3<0$ och $x+2<0$ och därmed;

$$|x-3| < |x+2| \;\Leftrightarrow\; -(x-3) < -(x+2) \;\Leftrightarrow\; 3 < -2$$

vilket inte är uppfyllt för några x i detta intervall.

(II) I detta intervall är $x-3<0$ och $x+2 \ge 0$ och därmed;

$$|x-3| < |x+2| \;\Leftrightarrow\; -(x-3) < x+2 \;\Leftrightarrow\; 1 < 2x \;\Leftrightarrow\; x > \tfrac{1}{2}$$

vilket i detta intervall är uppfyllt för $\frac{1}{2} < x < 3$.

(III) I detta intervall är $x-3 \ge 0$ och $x+2 \ge 0$ och därmed;

$$|x-3| < |x+2| \;\Leftrightarrow\; x-3 < x+2 \;\Leftrightarrow\; -3 < 2$$

vilket är uppfyllt för alla x i detta intervall.

Sammantaget får vi lösningarna; $(\frac{1}{2} < x < 3) \vee (x \ge 3) \;\Leftrightarrow\; x > \frac{1}{2}$

Svar: $x > \frac{1}{2}$

5. Hur mycket plåt går det åt för att tillverka en 10 cm hög cylindrisk burk som rymmer 1 liter ($= 1\,\text{dm}^3$). Burken skall ha formen av en rak cirkulär cylinder och plåten skall räcka till både den cylindriska mantelytan, samt botten och locket på burken. (4p)

Lösning: $V = \underbrace{\pi r^2 h}_{volymen} = 10\pi r^2 = \underbrace{1000\ \text{cm}^3}_{1\,liter} \Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$ cm

$$A = \underbrace{2\pi r^2}_{\substack{arean\ av\\ botten\ och\\ locket}} + \underbrace{2\pi r h}_{\substack{arean\ av\\ mantelytan}} = 200 + 200\sqrt{\pi}\ \text{cm}^2$$

Svar: $200(1+\sqrt{\pi})\ \text{cm}^2 \quad (= 2(1+\sqrt{\pi})\ \text{dm}^2)$

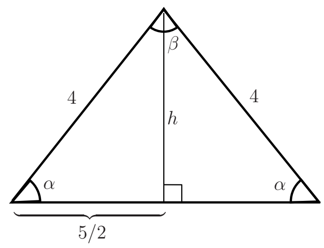
6. Låt T vara en likbent triangel med sidolängderna 4 dm, 4 dm och 5 dm.

(a) Beräkna arean av triangeln T. (3p)

Lösning: $h = \sqrt{4^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{2}$

$$A = \tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}5\tfrac{\sqrt{39}}{2} = \tfrac{5}{4}\sqrt{39}$$

Svar: $\frac{5}{4}\sqrt{39}$ dm^2



(b) Bestäm alla vinklar i triangeln T (svara med arcus-uttryck). (3p)

Lösning: $\cos\alpha = \frac{5/2}{4} = \frac{5}{8} \;\Rightarrow\; \alpha = \arccos\frac{5}{8}$

$\beta = 180° - 2\alpha = 180° - 2\arccos\frac{5}{8}$

(Alternativt: $\sin\left(\frac{1}{2}\beta\right) = \frac{5/2}{4} = \frac{5}{8} \;\Rightarrow\; \beta = 2\arcsin\frac{5}{8}$

Svar: En vinkel är $180° - 2\arccos\frac{5}{8}$ och de två övriga är $\arccos\frac{5}{8}$

7. (a) Bestäm riktningskoefficient och lutningsvinkeln för den linje som går genom punkterna $(1,1)$ och $(3,-3)$. (3p)

Lösning: Riktningskoefficient: $k = \dfrac{1-(-3)}{1-3} = \dfrac{4}{-2} = -2$

Riktningskoefficienten är negativ så lutningsvinkeln v fås genom sambandet $\tan(180° - v) = -k = 2 \;\Rightarrow\; 180° - v = \arctan 2$

Svar: Riktningskoefficienten är $k = -2$
och lutningsvinkeln är $v = 180° - \arctan 2$

(b) Bestäm medelpunkt och radie för cirkeln

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Kvadratkomplettering ger;

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \;\Leftrightarrow \\ \underbrace{(x-2)^2 - 4}_{x^2-4x} + \underbrace{(y+1)^2 - 1}_{y^2+2y} - 4 = 0 \;\Leftrightarrow \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \quad (= 3^2) \end{gathered}$$

Vi avläser att cirkeln har medelpunkt i $(2,-1)$ och radien 3.

Svar: Medelpunkt i $(2,-1)$ och radie 3

(c) Bestäm skärningspunkterna mellan linjen i (a) och cirkeln i (b). (3p)

Lösning: Från deluppgift (a) vet vi att linjen har riktningskoefficient $k = -2$ så enpunktsformeln ger att linjen kan beskrivas med ekvationen $y - 1 = -2(x-1) \;\Leftrightarrow\; y = 3 - 2x$.

Vi söker nu de punkter (x,y) som uppfyller både linjens och cirkelns ekvation, dvs. lösningarna på ekvationssystemet;

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

Om vi ersätter y i cirkelns ekvation med $3 - 2x$ så får vi;

$$x^2 + (3-2x)^2 - 4x + 2(3-2x) - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; 5x^2 - 20x + 11 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$x^2 - 4x + \frac{11}{5} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{11}{5}} = 2 \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Om vi sedan sätter in de två erhållna x-värdena i linjens ekvation så får vi;

$$y = 3 - 2\left(2 \pm \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = -1 \mp \frac{6}{\sqrt{5}}$$

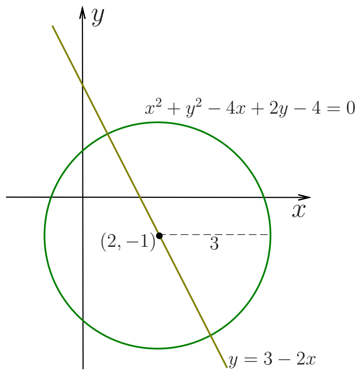
varpå vi konstaterar att;

Svar: Linjen skär cirkeln i de två punkterna

$$\left(2 + \frac{3}{\sqrt{5}}, -1 - \frac{6}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{och} \quad \left(2 - \frac{3}{\sqrt{5}}, -1 + \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$$

(d) Skissa linjen i (a) och cirkeln i (b) i samma figur.

Skiss: (2p)



8. Lös olikheten $\dfrac{x^2}{x^3-1} + \dfrac{1}{(x^2+x+1)^2} \geq \dfrac{1}{x-1}$ (6p)

Lösning:

$$\frac{x^2}{x^3-1} + \frac{1}{(x^2+x+1)^2} \geq \frac{1}{x-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{x-1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)^2} + \frac{(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)^2} - \frac{(x^2+x+1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2(x^2+x+1) + (x-1) - (x^2+x+1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{-x^3 - 2x^2 - x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{-(x+2)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+2)}{(x-1)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-2 \leq x < 1$$

Svar: $-2 \leq x < 1$

9. Visa att om två linjer skär varandra under rät vinkel så gäller det för deras riktningskoefficienter k_1 och k_2 att $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$. (6p)