Tentamen i Matematik, del A, för Tekniskt basår

Kurskod: MVE425
Telefonvakt: tel.
Datum: 16 augusti 2016
Tid för tentamen: 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga
Betygsgränser: Betyg 3: 20 - 31, Betyg 4: 32 - 41, Betyg 5: 42 - 50

"Beauty is the first test; there is no permanent place in the world for ugly mathematics."

(G.H. Hardy, 1877 - 1947)

1. Avgör om följande implikation och utsaga är sanna eller falska. (*Motivera ditt svar*)

   (a) $A \implies B$, där $A : 3x - 1 = 11$ och $B : x^2 = 16$ (2p)

   Svar: Sant, ty $3x - 1 = 11 \iff x = 4$ och $x = 4 \implies x^2 = 16$.
   Poängsättning
   Korrekt svar med godtagbar motivering (+2p)

   (b) $|x + 2| = |x| + |2|, \forall x \in \mathbf{R}$ (2p)

   Svar: Falskt, $|x + 2| = -(x + 2)$ om $x + 2 < 0 \iff x < -2$, så för $x < -2$ blir $-(x + 2) = -x - 2 = |x| - |2| \neq |x| + |2|$
   Poängsättning
   Korrekt svar med godtagbar motivering (+2p)

2. Förenkla och skriv följande uttryck på så enkel form som möjligt

   (a) $\dfrac{(xy^{-3})^2 y^5 - y}{x + y}$ (3p)

   Lösning: $\frac{(xy^{-3})^2y^5-y}{x+y} = \frac{(x^2y^{-6})y^5-y}{x+y} = \frac{(x^2y^{-1})-y}{x+y} = \frac{\frac{x^2}{y}-y}{x+y} = \frac{\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{y}}{x+y} = \frac{x^2-y^2}{y(x+y)} = \frac{(x-y)(x+y)}{y(x+y)} = \frac{x-y}{y} = \frac{x}{y} - 1$

   Svar: $\frac{x-y}{y}$ eller $\frac{x}{y} - 1$

Poängsättning
Lämplig ansats, (+1p)
Godtabar delförenkling (+1p)
Korrekt svar (+1p)

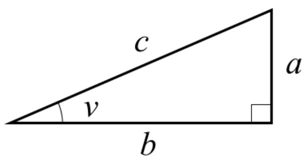
(b) $\dfrac{\sqrt[6]{27t^{18}}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{t^6}}$ (3p)

Lösning: $\frac{\sqrt[6]{27t^{18}}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{t^6}} = \frac{27^{1/6}t^{18/6}}{3^{1/2}t^{6/3}} = \frac{(3^3)^{1/6}t^3}{3^{1/2}t^2} = \frac{3^{1/2}t^3}{3^{1/2}t^2} = t$

Svar: $\frac{\sqrt[6]{27t^{18}}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{t^6}} = t$
Poängsättning
Lämplig ansats, tex visar förståelse för potensregler (+1p)
Godtabar förenkling (+1p)
Korrekt svar (+1p)

3. Beräkna exakt $cosv$ och $tanv$ då $sinv = \frac{5}{6}$ (3p)

Lösning: $sinv = \frac{5}{6}$ innebär att motstående katet genom hypotenusan förhåller sig som $\frac{5}{6} \iff \frac{a}{c} = \frac{5}{6}$.

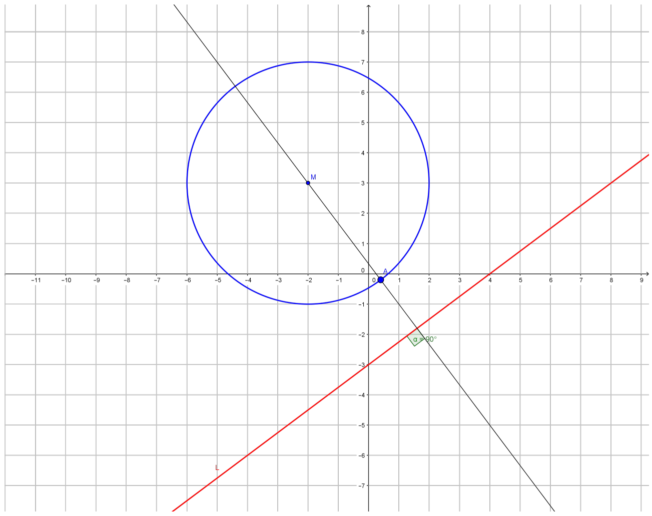


Vidare har vi att $\cos v = \frac{b}{c}$ och $\tan v = \frac{a}{b}$, där a betecknar motstående katet, b betecknar närliggande katet och c betecknar hypotenusan. Pythagoras sats ger $6^2 = 5^2 + b^2 \iff b = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$. Detta ger då $\cos v = \frac{\sqrt{11}}{6}$ och $\tan v = \frac{5}{\sqrt{11}}$
Svar: $\cos v = \frac{\sqrt{11}}{6}$ och $\tan v = \frac{5}{\sqrt{11}}$

Poängsättning
Lämplig ansats, tex bestämma okänd katet mha Pythagoras, eller visa hur $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ beräknas i en rätvinklig triangel (+1p)
Godtagbart svar av någon av $\cos v$ och $\tan v$ (+1p)
Korrekt svar (+1p)

4. Beräkna exakt den punkt på cirkeln $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ som ligger närmast linjen $L : 3x - 4y - 12 = 0$. (8p)

Lösning: Rita t.ex. upp cirkeln och linjen i ett koordinatsystem. Den punkt på cirkeln som ligger närmast L är den punkt som ligger på en vinkelrät linje till L genom cirkelns medelpunkt.



Från cirkelns ekvation $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ fås att medelpunkten är $(-2, 3)$. Skriver vi om linjen på “k-form” får vi $3x - 4y - 12 = 0 \iff$ $\iff y = \frac{3}{4}x - 3$, vilket ger riktningskoefficienten $k_L = \frac{3}{4}$. För vinkelräta linjer vet vi att $k_L \cdot k = -1 \iff k = -\frac{4}{3}$ för den linje vi söker. Enpunktsformeln (anv. cirkelns medelpkt) ger nu den vinkelräta linjens ekvation $y - 3 = -\frac{4}{3}(x+2) \iff y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

För att nu hitta pkt på cirkeln som ligger närmast L behöver vi hitta skärningspkt mellan cirkel och den vinkelräta linjen, dvs lös

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} \iff (x+2)^2 + (-\tfrac{4}{3}x + \tfrac{1}{3} - 3)^2 = 16 \iff$$

$$(x+2)^2 + (-\tfrac{4}{3}x - \tfrac{8}{3})^2 = 16 \iff (x+2)^2 + (-1(\tfrac{4}{3}x + \tfrac{8}{3}))^2 = 16 \iff$$

$$x^2 + 4x + 4 + \tfrac{16}{9}x^2 + \tfrac{64}{9}x + \tfrac{64}{9} = 16 \iff \tfrac{25}{9}x^2 + \tfrac{100}{9}x + \tfrac{100}{9} = 16 \iff$$

$$\tfrac{25}{9}(x^2 + 4x + 4) = 16 \iff \tfrac{25}{9}(x+2)^2 = 16 \iff \tfrac{5}{3}(x+2) = \pm 4 \iff$$

$$x + 2 = \pm\tfrac{12}{5} \implies x = \tfrac{12}{5} - 2 = \tfrac{2}{5} \text{ eller } x = -\tfrac{12}{5} - 2 = -\tfrac{22}{5}.$$

Eftersom vi söker punkten närmast linjen L är inte $x = -\frac{22}{5}$ relevant, alltså $x = \frac{2}{5} \implies y = -\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{5}$.

Svar: Den sökta punkten har koordinaterna $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$.

Poängsättning

Lämplig ansats, tex rita upp cirkeln eller skriva upp linjen L på “k-form”	(+1p)
Bestämt både ekv för L och bestämt medelpkt för cirkel	(+1p)
Godtagbar fortsättning tex visa att måste hitta vinkelrät linje	(+1p)
Visa hur vinkelrät linje kan bestämmas	(+1p)
Godtagbar ekv för vinkelrät linje	(+1p)

Ställa upp relevant ekv.system (+1p)

Godtagbar lösning av ekv.system (+1p)

Korrekt angiven punkt (+1p)

5. Lös olikheten $2x^3 < 7x^2 + 5x - 4$ (6p)

Lösning: Eftersom det oftast är lättast att undersöka om ett uttryck är positivt eller negativt flyttar vi först alla termer till ena sidan så att $2x^3 < 7x^2+5x-4 \iff p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 < 0$. Nu behöver vi hitta rötterna till $p(x) = 0$, för att sedan undersöka i vilka intervall $p(x) < 0$.

$p(x) = 0 \iff 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = 0$. Enligt satsen om heltalsrötter ska ev heltalsrötter vara delare till 4 $\implies$ $\pm 1, \pm 2$ och ± 4 är möjliga heltalsrötter. Testar: $p(-1) = 0, p(1) = -6, p(-2) = -30, p(2) = -18, p(4) = 0, p(-4) = -216$. Vi ser då att $x = -1$ och $x = 4$ är rötter till $p(x) = 0$ och enligt faktorsatsen är då $x+1$ och $x-4$ faktorer till $p(x)$. För att hitta tredje roten till $p(x) = 0$ dividerar vi $p(x)$ med $(x+1)(x-4) = x^2 - 3x - 4$.

$$
\begin{array}{r|r}
 & 2x - 1 \\
\hline
x^2 - 3x - 4 & 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 \\
 & -\,2x^3 + 6x^2 + 8x \\
\hline
 & -\,x^2 + 3x + 4 \\
 & x^2 - 3x - 4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Detta ger oss $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = (2x-1)(x+1)(x-4) =$
$= 2(x - \frac{1}{2})(x+1)(x-5)$, dvs den tredje roten till $p(x) = 0$ är $x = \frac{1}{2}$.
Ett annat alternativ är att t.ex. utföra divisionen

$$
\begin{array}{r|r}
 & 2x^2 - 9x + 4 \\
\hline
x + 1 & 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 \\
 & -\,2x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & -\,9x^2 - 5x \\
 & 9x^2 + 9x \\
\hline
 & 4x + 4 \\
 & -\,4x - 4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Detta ger $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = (x+1)(2x^2 - 9x + 4)$, och då får vi lösa $2x^2 - 9x + 4 = 0 \iff 2(x^2 - \frac{9}{2}x + 2) = 0 \iff x = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - \frac{32}{16}} \iff x = \frac{9}{4} \pm \frac{7}{4}$, vilket ger rötterna $x = \frac{1}{2}$, samt $x = 4$, och då faktorerna $x - \frac{1}{2}$ och $x - 4$ så att $2(x^2 - \frac{9}{2}x + 2) = 2(x - \frac{1}{2})(x-4) \implies p(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x-4)(x+1)$.

Värdet på $p(x)$ kan nu undersökas med tex en teckentabell

x	$<$	-1	$<$	$\frac{1}{2}$	$<$	4	$<$
x - $\frac{1}{2}$	-	-	-	0	+	+	+
x+1	-	0	+	+	+	+	+
x - 4	-	-	-	-	-	0	+
$p(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Härifrån ser vi nu att $p(x) < 0$ om $x < -1$ eller $\frac{1}{2} < x < 4$.

Svar: $(x < -1) \vee (\frac{1}{2} < x < 4)$.

Poängsättning

Lämplig ansats, tex inse att behöver hitta "rötter/intressanta x-värden" (+1p)

Börja faktorisera 3e-gradspolynom (+1p)

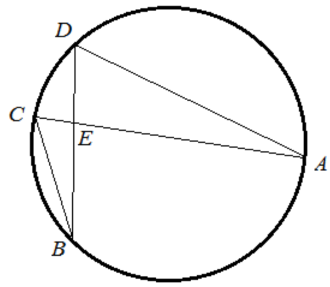
Godtagbar fortsättning tex bestämma minst två av rötterna på acceptabelt sätt (+1p)

Hitta alla tre "rötter/brytpunkter" och visa hur dessa kan användas för att lösa olikheten (+1p)

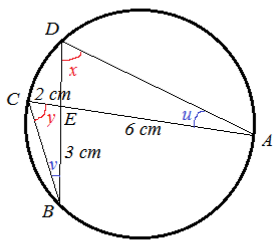
Godtagbar undersökning av tecken på polynom och bestämt något intervall (+1p)

Korrekt angivna intervall (+1p)

6. Fyra kordor har ritats in i en cirkel enligt figuren nedan. Bestäm längden på kordan BD om $AE = 6$ cm, $BE = 3$ cm och $CE = 2$ cm. (4p)



Lösning:



Vinkel u och v är randvinklar till samma cirkelbåge, CD, och x och y är båda randvinklar till cirkelbågen AB. Randvinkelsatsen ger då att $u = v$ samt att $x = y$, vilket innebär att $\triangle ADE \sim \triangle BCE$. Längden på sträckan $BD = BE + DE$, BE är given och DE fås genom att utnyttja likformigheten $\frac{DE}{CE} = \frac{AE}{BE} \iff DE = CE \cdot \frac{AE}{BE} = 2 \cdot \frac{6}{3} = 4$ cm.

Detta ger $BD = BE + DE = 3 + 4 = 7$ cm.

Svar: $BD = 7$ cm
Poängsättning
Lämplig ansats, tex insett att randvinkelsats behöver användas (+1p)
Godtagbar motivering av likformighet (+1p)
Godtagbar beräkning av längderna (+1p)
Korrekt svar (+1p)

7. Lös ekvationssystemet $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 4y & + & 5z & = & -33 \\ 4x & - & y & & & = & -5 \\ -2x & + & 2y & - & 3z & = & 19 \end{array}\right.$ med eliminations-metoden. (4p)

Lösning: $\begin{cases} 2x-4y+5z=-33 \\ 4x-y \quad =-5 \\ -2x+2y-3z=19 \end{cases} \xrightarrow{-2R_1 \to R_2;\, 1R_1 \to R_3} \begin{cases} 2x-4y+5z=-33 \\ 7y-10z=61 \\ -2y+2z=-14 \end{cases} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3}$

$\begin{cases} 2x-4y+5z=-33 \\ 7y-10z=61 \\ y-z=7 \end{cases} \xrightarrow{byt R_3 och R_2} \begin{cases} 2x-4y+5z=-33 \\ y-z=7 \\ 7y-10z=61 \end{cases} \xrightarrow{4R_2 \to R_1 \;;\; -7R_2 \to R_3}$

$\begin{cases} 2x \quad +z=-5 \\ y-z=7 \\ -3z=12 \end{cases} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_3} \begin{cases} 2x \quad +z=-5 \\ y-z=7 \\ z=-4 \end{cases} \xrightarrow{-1R_3 \to R_1;\, 1R_3 \to R_2}$

$\begin{cases} 2x \quad =-1 \\ y \quad =3 \\ z=-4 \end{cases} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{cases} x \quad =-\frac{1}{2} \\ y \quad =3 \\ z=-4 \end{cases}$

Svar: $x = -\frac{1}{2}, y = 3, z = -4$
Poängsättning
Godtagbar ansats av eliminationsmetoden (+1p)
Visar minst fyra godtagbara radoperationer (+1p)
Godtagbar lösning, med ev ngt teckenfel el liknande (+1p)
Korrekt lösning (+1p)

8. Undersök följande ekvation $4x^2 + 4x + cy^2 - 2cy + 1 = 0$ och avgör för vilka värden på konstanten c som ekvationen beskriver en cirkel, en ellips, samt en hyperbel. Bestäm även medelpunkt för de olika kägelsnitten. (8p)

Lösning: Cirkelns ekvation är $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, där (x_0, y_0) är cirkelns medelpunkt och r är radien. Ellipsens ekvation är $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, där (x_0, y_0) är ellipsens medelpunkt och a och b är ellipsens halvaxlar. Hyperbelns ekvation är $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, där (x_0, y_0) är hyperbelns medelpunkt och a och b är halvaxlarna.

För att undersöka ekvationen med olika avseenden på c vill vi skriva om den på kägelsnittens form, så börja med att kvadratkomplettera m.a.p. x och y.

$4x^2 + 4x + cy^2 - 2cy + 1 = 0 \iff (4(x^2 + x + \mathbf{\frac{1}{4}}) + (c(y^2 - 2y + \mathbf{1})) + 1 =$

$\mathbf{1 + c} \iff 4(x+\frac{1}{2})^2 + c(y-1)^2 = c$

Från ekvationerna ovan för respektive kägelsnitt ser vi att om $4(x+\frac{1}{2})^2 + c(y-1)^2 = c$ ska beskriva en cirkel måste $c = 4$ $\implies 4(x+\frac{1}{2})^2 + 4(y-1)^2 = 4 \iff (x+\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = 1$, som ger en cirkel med medelpunkt $(-\frac{1}{2}, 1)$ och radie $r = 1$.

Vidare får vi att $4(x+\frac{1}{2})^2 + c(y-1)^2 = c \iff \frac{4}{c}(x+\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = 1$ och ser då att ekvationen är odefinierad för $c = 0$,

om $0 < c < 4$ eller $c > 4$ får vi en ellips med medelpunkt $(-\frac{1}{2}, 1)$ och halvxlar $a = \frac{\sqrt{c}}{2}$ och $b = 1$, och

om $c < 0$ får vi en hyperbel med medelpunkt $(-\frac{1}{2}, 1)$ och halvxlar $a = \frac{\sqrt{|c|}}{2}$ och $b = 1$.

Svar: $c = 4$ ger en cirkel med medelpunkt $(-\frac{1}{2}, 1)$, $0 < c < 4$ eller $c > 4$ ger en ellips med medelpunkt $(-\frac{1}{2}, 1)$ och $c < 0$ ger en hyperbel med medelpunkt $(-\frac{1}{2}, 1)$.

Poängsättning

Lämplig ansats, tex visar hur ekv för olika kägelsnitt ser ut, eller börjar kvadratkomplettera. (+1p)

Både visar ekv, samt börjar kvadratkomplettera (+1p)

Godtagbar kvadratkomplettering av uttrycket (+1p)

Godtagbart resonemang av vilket värde på c som ger en cirkel (+1p)

Bestämmer korrekt medelpunkten för cirkel (+1p)

Bestämmer godtagbara värden på c för ellips/eller hyperbel (+1p)

Anger godtagbara värden på c för alla kägelsnitten (+1p)

samt medelpunkterna (+1p)

9. Formulera och bevisa den Trigonometriska ettan för spetsiga vinklar. (3p)

Lösning: Se avsnitt 6.3

Poängsättning

Godtagbar formulering av "ettan" (+1p)

Godtagbar ansats av bevis, tex rita en figur, formulera Pythagoras sats eller ställa upp några trigonometriska relatione (+1p)

Tydligt och logiskt bevis (+1p)

10. Visa att om två linjer skär varandra under rät vinkel så gäller det för riktningskoefficienterna k_1 och k_2 att $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ (4p)

Lösning: Se avsnitt 12.5

Poängsättning

Godtagbar ansats av bevis, tex skriva upp räta linjens ekv	(+1p)
Lämplig fortsättning, tex rita en figur och markera vinklar, eller anv relation mellan riktningskoefficient och lutningsvinkel	(+1p)
Godtagbar motivering med ev vissa logiska luckor	(+1p)
Tydligt och logiskt bevis av påståendet	(+1p)