

Tentamen i Matematik, del A, för Tekniskt basår

Kurskod: MVE425

Telefonvakt: Helena Johansson tel.

Datum: 5 januari 2016

Tid för tentamen: 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: Betyg 3: 20 - 31, Betyg 4: 32 - 41, Betyg 5: 42 - 50

“A mathematical theory is not to be considered complete until you have made it so clear that you can explain it to the first man whom you meet on the street.”

(David Hilbert, 1862 - 1943)

1. Avgör om följande ekvivalens och utsaga är sanna eller falska. (*Motivera ditt svar*)

(a) $A \Leftrightarrow B$, där $A : x = 3$ och $B : x^2 = 9$ (2p)

Svar: Falskt, ty för $x^2 = 9$ så måste inte $x = 3$ gälla, det kan även gälla att $x = -3$.

Poängsättning

Korrekt svar (+2p)

(b) $\sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}, \forall x \in \mathbf{R}$ (2p)

Svar: Falskt, kvadratrotsfunktionen är ej definerad för $x < 0$

Poängsättning

Korrekt svar (+2p)

2. Förenkla och skriv följande uttryck på så enkel form som möjligt

(a) $\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{a+b}{a-b}} + \frac{2}{ab}$ (3p)

Lösning:
$$\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{a+b}{a-b}} + \frac{2}{ab} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}}{\frac{a+b}{a-b}} + \frac{2}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{a-b}{a+b} + \frac{2}{ab} =$$
$$= \frac{(a-b)(a+b)}{a^2 b^2} \cdot \frac{a-b}{a+b} + \frac{2}{ab} = \frac{(a-b)^2}{a^2 b^2} + \frac{2}{ab} = \frac{(a^2 - 2ab + b^2) + 2ab}{a^2 b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

Svar: $\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$

Poängsättning

Lämplig ansats,

(+1p)

Godtabar delförenkling

(+1p)

Korrekt svar

(+1p)

$$(b) \frac{360^{19} \cdot 225^{14}}{250^{16} \cdot 18^{34}} \quad (4p)$$

$$\begin{aligned} \text{Lösning: } \frac{360^{19} \cdot 225^{14}}{250^{16} \cdot 18^{34}} &= \frac{(2 \cdot 10 \cdot 18)^{19} \cdot (9 \cdot 25)^{14}}{(10 \cdot 25)^{16} \cdot 18^{34}} = \frac{2^{19} \cdot 10^{19} \cdot 18^{19} \cdot 9^{14} \cdot 25^{14}}{10^{16} \cdot 25^{16} \cdot 18^{34}} = \\ &= 2^{19} \cdot 10^{19-16} \cdot 18^{19-34} \cdot 9^{14} \cdot 25^{14-16} = \frac{2^{19} \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 9^{14}}{(2 \cdot 9)^{15} \cdot (5^2)^2} = \\ &= \frac{2^{19} \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 9^{14}}{2^{15} \cdot 9^{15} \cdot 5^4} = 2^{22-15} \cdot 5^{3-4} \cdot 9^{14-15} = \frac{2^7}{5 \cdot 9} = \frac{128}{45} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{128}{45}$ **Poängsättning**

Lämplig ansats, tex faktorisering

(+1p)

Visar förståelse för potensregler

(+1p)

Godtabar förenkling

(+1p)

Korrekt svar

(+1p)

3. Lös ekvationen $|x^2 - 4x - 5| = 7$ algebraiskt och illustrera sedan lösningen grafiskt.

(6p)

Lösning: Enligt definitionen av absolutbelopp är

$$|x^2 - 4x - 5| = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{om } x^2 - 4x - 5 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x - 5) & \text{om } x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases}$$

så vi får två olika fall att lösa

$$1. x^2 - 4x - 5 = 7 \iff x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\iff (x - 6)(x + 2) = 0 \iff x = 6 \text{ och } x = -2$$

samt

$$2. -(x^2 - 4x - 5) = 7 \iff -x^2 + 4x + 5 = 7 \iff x^2 - 4x + 2 = 0$$

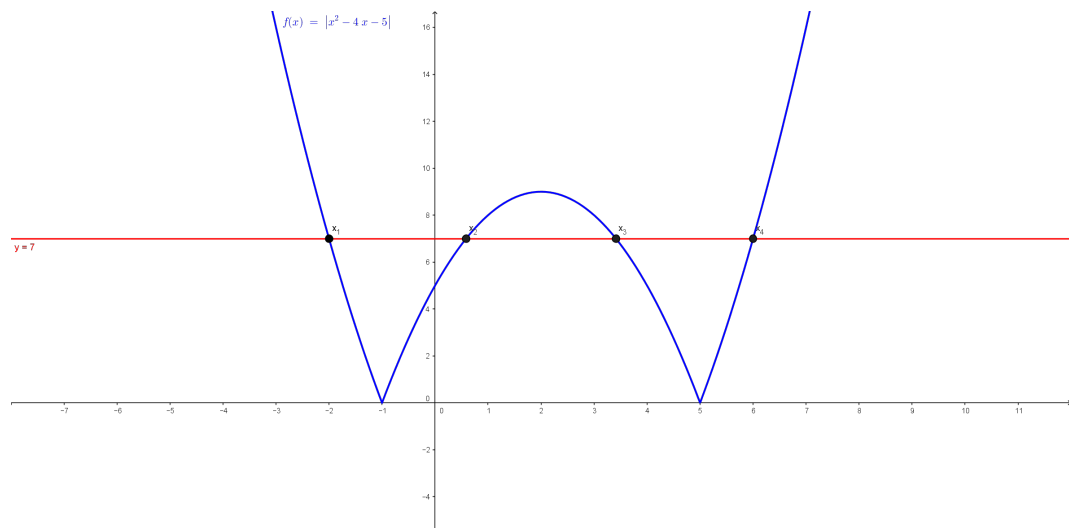
$$\iff x = 2 \pm \sqrt{4 - 2} \iff x = 2 \pm \sqrt{2}$$

nu har vi fyra rötter till ekvationen $|x^2 - 4x - 5| = 7$ **Svar:** $x_1 = -2$, $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$ och $x_4 = 6$

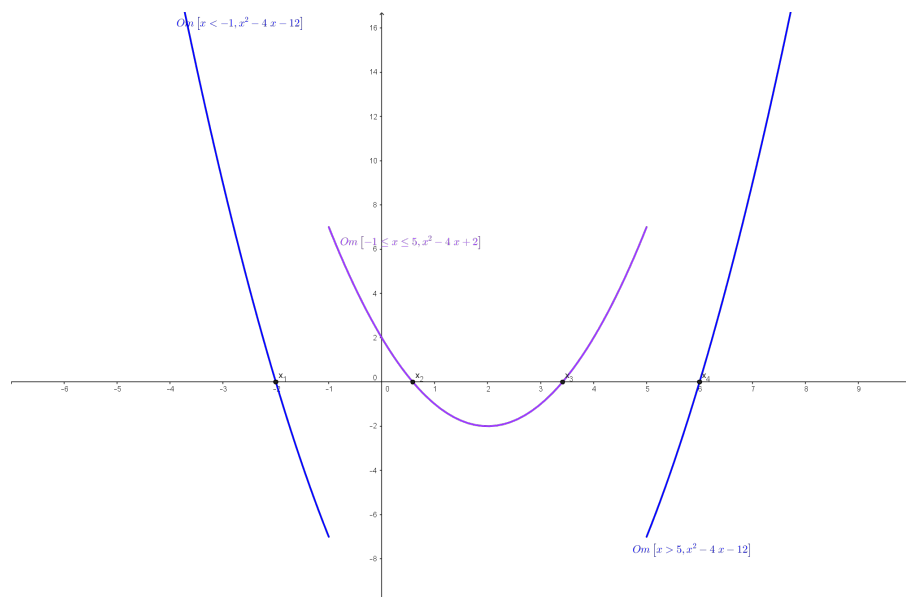
För att kunna skissa grafen till $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ behöver vi först bestämma för vilka x som $x^2 - 4x - 5 < 0$, dvs hitta "brytpunkter". Så vi löser $x^2 - 4x - 5 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{4 + 5} \iff x = 2 \pm 3$. Testa t.ex. med $x = 0$ för att se om $f(x)$ är > 0 eller < 0 i intervallet. För att mellan $x = -1$ och $x = 5$ är $x^2 - 4x - 5 < 0$, och då kommer $|x^2 - 4x - 5|$ vara en spegling av

$x^2 - 4x - 5$ i x -axeln, dvs $|x^2 - 4x - 5| = -x^2 + 4x + 5$ i detta intervall.
Skissa grafen

Rita sedan in linjen $y = 7$ och markera de fyra skärningspunkterna, se figur.



Alternativ: Rita istället grafen till $x^2 - 4x - 12$ för $x \leq -1$ och $x \geq 5$, samt $x^2 - 4x + 2$ för $-1 < x < 5$. Markera sedan de fyra skärningspunkterna med x -axeln.



Poängsättning

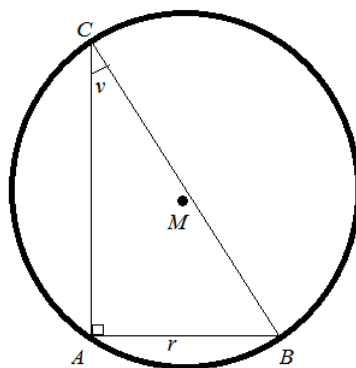
Lämplig ansats, tex inse att man måste betrakta två fall (+1p)

Godtagbar fortsättning tex bestämma minst två av rötterna på acceptabelt sätt (+1p)

Hitta alla fyra rötter (+1p)

- Lämplig ansats för att bestämma hur grafen ser ut, tex bestämma brytpunkter (+1p)
 Skissa grafen på godtagbart sätt (+1p)
 Markera lösningarna på korrekt sätt (+1p)

4. För något/några värden på k beskriver ekvationen $\frac{x^2}{k+1} + \frac{y^2}{7-k^2} = 1$ en cirkel med medelpunkt M och radie r , se figur nedan.



- (a) Bestäm det/de värde(n) på k som uppfyller att cirkeln beskrivs av den givna ekvationen, samt ange cirkelns medelpunkt och radie för detta/dessa k . (4p)

Lösning: Cirkelns ekvation är $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, där (x_0, y_0) är cirkelns medelpunkt M och r är radien. Om $\frac{x^2}{k+1} + \frac{y^2}{7-k^2} = 1$ ska beskriva en cirkel måste därför $k+1 = 7-k^2$, så detta kan "förkortas bort" från VL.

$$k+1 = 7-k^2 \implies k^2+k-6=0 \iff k = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \iff k = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \implies k = 2 \text{ och } k = -3$$

$$\text{Om } k = 2 \implies \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1 \iff x^2 + y^2 = 3 \implies$$

$$M = (0,0) \text{ och } r = \sqrt{3}$$

$$\text{Om } k = -3 \implies \frac{x^2}{-2} + \frac{y^2}{-2} = 1 \iff -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1 \iff$$

$\iff x^2 + y^2 = -2 \implies$ ingen cirkel (kvadraten på radien kan inte vara negativ). Inget kägelsnitt överhuvudtaget.

Svar: $k = 2$ ger att ekvationen beskriver en cirkel med medelpunkt i origo och radien $\sqrt{3}$

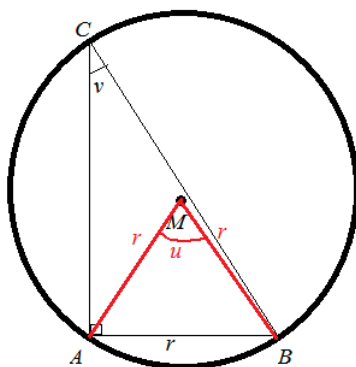
Poängsättning

- Lämplig ansats, tex sätter nämnarna lika och börjar lösa 2a-gradsekv. (+1p)
 Godtagbart svar av värdet på k (+1p)
 Godtagbart beräkning av medelpunkt eller radie (+1p)
 Godtagbart svar av både medelpunkt och radie. (+1p)

- (b) Triangeln ABC har sina hörn på cirkelns rand, och sidan AB är lika lång som radien i cirkeln (se figuren ovan). Bestäm vinkeln v . (2p)

Lösning:

Vinkel v är randvinkel till cirkelbågen AB . Drag två linjer från A , respektive B in till M , då är vinkel u medelpunktsvinkel till bågen AB . Enligt randvinkelsatsen är vinkeln $u = 2v$. Eftersom sidan AB har längden r bildar triangeln ABM en liksidig triangel och vinklarna i en liksidig triangel är $60^\circ \Rightarrow v = \frac{u}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.



Alternativ: Från randvinkelsatsen vet vi att en diameter till en cirkel alltid har en rät vinkel som randvinkel, ty diametern har medelpktsvinkel $180^\circ \Rightarrow$ randvinkel 90° . I figuren är den räta vinkeln medelpktsvinkel till cirkelbågen BC då måste linjen BC vara diameter, eftersom denna ger medelpunktsvinkeln till cirkelbågen BC . från a) vet vi att $r = \sqrt{3}$, då kommer sidan BC vara $2\sqrt{3}$.

Nu kan t.ex. relation för sinus i rätvinklig triangel användas för att bestämma v , $\sin v = \frac{r}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \iff v = 30^\circ$.

Svar: $v = 30^\circ$.

Poängsättning

Lämplig ansats, tex markerat medelpunktsvinkel och motiverat att denna är 60° , eller motiverat att BC är diameter (2p)

Godtagbar motivering av svar, (+1p)

- (c) Bestäm längden av sidan AC exakt. (2p)

Lösning:

Från uppgift a) vet vi att sidan $AB = r = \sqrt{3}$ och från uppgift b) vet vi att vinkeln $v = 30^\circ$. Vidare har vi att triangel ABC är rätvinklig med kateter AB och AC . Från trigonometrin har vi att

$\tan v = \frac{AB}{AC} \implies AC = \frac{AB}{\tan v}$, vidare har vi att exakt värde av $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Sammantaget ger detta oss $AC = \frac{\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} = 3$.

Alternativ: Har man i uppg b) motiverat att sidan BC är en diameter kan man använda pythagoras sats så att: $(AC)^2 = (BC)^2 - (AB)^2 \iff AC = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{12 - 3} = 3$ le

Svar: $AC = 3$ le.

Poängsättning

Lämplig ansats, tex visat hur tangens kan användas för att bestämma sidlängden, eller pyt.sats (+1p)

Godtagbar motivering och svar (+1p)

5. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y - 3z = -10 \\ x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - z = -6 \end{cases}$$
 med eliminationsmetoden. (3p)

Lösning:
$$\begin{aligned} &\begin{cases} x+y-3z=-10 \\ x-y+2z=3 \\ 2x+y-z=-6 \end{cases} \xrightarrow{-1R_1 \rightarrow R_2; -2R_1 \rightarrow R_3} \begin{cases} x+y-3z=-10 \\ -2y+5z=13 \\ -y+5z=14 \end{cases} \xrightarrow{-1R_2 \rightarrow R_3} \\ &\begin{cases} x+y-3z=-10 \\ -2y+5z=13 \\ y=1 \end{cases} \xrightarrow{byt R_3 och R_2} \begin{cases} x+y-3z=-10 \\ y=1 \\ -2y+5z=13 \end{cases} \xrightarrow{-1R_2 \rightarrow R_1; 2R_2 \rightarrow R_3} \\ &\begin{cases} x & -3z=-11 \\ y & =1 \\ 5z=15 \end{cases} \xrightarrow{1/5R_3} \begin{cases} x & -3z=-11 \\ y & =1 \\ z=3 \end{cases} \xrightarrow{3R_3 \rightarrow R_1} \begin{cases} x & =-2 \\ y & =1 \\ z=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Svar: $x = -2, y = 1, z = 3$

Poängsättning

Godtagbar ansats av eliminationsmetoden (+1p)

Godtagbar lösning, med ev ngt teckenfel el liknande (+1p)

Korrekt lösning (+1p)

6. Lös olikheten $\frac{x+2}{3x-6} > 0$ (4p)

Lösning: Låt $Q(x) = \frac{x+2}{3x-6}$, $Q(x)$ är positiv när både täljare och nämnare samtidigt är positiva eller när de samtidigt är negativa. För att studera tecknet på täljare och nämnare bestämmer vi brytpunkterna $x+2=0 \iff x=-2$ och $3x+6=0 \iff x=-2$. Använd tex en teckentabell, då får vi att $Q(x) > 0$ om $x < -2$ eller $x > 2$.

x	$<$	-2	$<$	2	$<$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x-6$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$Q(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$+$

Svar: $(x < -2) \vee (x > 2)$.

Poängsättning

- Godtagbar ansats tex inse att brytpkt måste bestämmas (+1p)
ställer upp relevant teckentabell (+1p)
hittar tex ett av intervallen på godtagbart sätt, eller tex intervall utan strikt oliket (+1p)
korrekt svar med båda intervallen (+1p)

7. För vilket/vilka värden på k blir $p(x) = x^{27} + kx^2 + x + 15$ jämt delbart med $q(x) = x + 1$? (3p)

Lösning: Att divisionen $\frac{x^{27}+kx^2+x+15}{x+1}$ ska gå jämt upp är samma sak som att det inte blir någon rest. Enligt faktorsatsen är då $x + 1$ en faktor till $x^{27} + kx^2 + x + 15 \iff x = -1$ är en rot till $p(x) = 0$. Vi kan då sätta in $x = -1$ i $p(x) = 0$ och lösa ekvationen $(-1)^{27} + k \cdot (-1)^2 - 1 + 15 = 0 \iff -1 + k - 1 + 15 = 0 \iff k = -13$. Så om $k = -13$ blir $p(-1) = 0$ och då är $x + 1$ en faktor till $x^{27} + kx^2 + x + 15$ och $p(x) = x^{27} - 13x^2 + x + 15$ är jämt delbart med $q(x) = x + 1$.

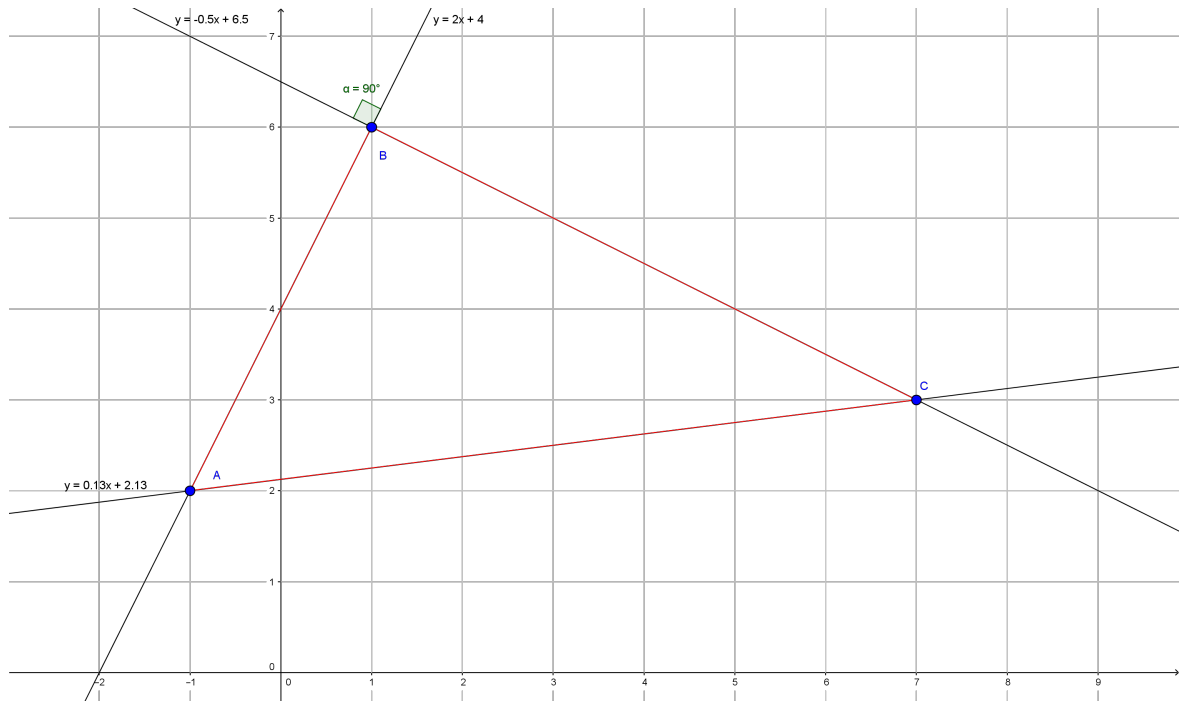
Svar: $k = -13$

Poängsättning

- Godtagbar ansats, tex resonemang utifrån faktorsatsen (+1p)
Godtagbar redovisning och uppställning av tex ekvtionen $p(-1) = 0$ (+1p)
med korrekt svar (+1p)

8. Triangeln ABC har sina hörn i koordinaterna $A = (-1, 2)$, $B = (1, 6)$ och $C = (7, 3)$. Beräkna triangelns area och svara på enklaste form. (7p)

Lösning: Rita upp punkterna i ett koordinatsystem.



Arealn av en triangel fås av $A = \frac{bh}{2}$ så vi måste bestämma längden av basen och höjden till triangeln ABC . Längden av sidorna i triangeln fås från avståndsformeln $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, detta ger längden av $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$, $BC = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$ och $AC = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$.

För att avgöra vilken av sidorna vi ska välja som bas, och utifrån detta höjd, så bestämmer vi ekvationerna till de räta linjerna som begränsar triangelns area. Dessa är:

linjen som går genom A och B : $y = 2x + 4$, fås tex från tvåpktsformeln $y - 6 = \frac{6-2}{1-(-1)}(x - 1)$,

linjen som går genom B och C : $y = -\frac{x}{2} + \frac{13}{2}$, tvåpktformel $y - 6 = \frac{6-3}{1-7}(x - 1)$ och

linjen genom A och C : $y = \frac{x}{8} + \frac{17}{8}$, tvåpktformel $y - 3 = \frac{3-2}{7+1}(x - 7)$

Om vi jämför riktningskoefficienterna för linjerna $y = 2x + 4$ och $y = -\frac{x}{2} + \frac{13}{2}$ ser vi att dessa är vinkelräta, ty produkten av $k_1 = 2$ och $k_2 = -\frac{1}{2}$ är -1 . Detta innebär att vi kan välja tex AB som bas och BC som höjd till triangeln. Vi får då arean $A = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{45}}{2} = \frac{\sqrt{20 \cdot 45}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 9}}{2} = \frac{\sqrt{10 \cdot 10 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15$ a.e.

Svar: Triangelns area är 15 a.e.

Poängsättning

Godtagbar ansats, tex ritar upp triangeln och bestämmer någon av sidlängderna

(+1p)

eller bestämmer ekvationen till någon av de räta linjer som går genom triangelns hörn

gjort båda delarna

(+1p)

bestämt fler avstånd och/eller fler ekvationer till övriga räta linjer

(+1p)

godtagbart resonemang kring hur bas och höjd kan väljas, villkor för vinkel-räta linjer	(+1p)
uppställning av beräkning av triangelarea med rimliga värden	(+1p)
godtagbar förenkling av arean	(+1p)
korrekt svar i enklaste form	(+1p)

9. Härled parabelns ekvation med brännpunkt $(0, c)$. (*Rita figur*) (4p)

Lösning: Se avsnitt 14.3

Poängsättning

Rita godtagbar figur av parabel med markerade pkt etc.	(+1p)
Godtagbar ansats av bevis, tex skriva upp avståndsformeln för PB eller PS	(+1p)
Sätta avstånden lika och förenkla på godtagbart sätt	(+1p)
Tydligt och logiskt visat fullständig härledning av parabelns ekvation	(+1p)

10. Formulera och bevisa Pythagoras sats. (4p)

Lösning: Se avsnitt 5.4

Poängsättning

Korrekt formulering av satsen	(+1p)
Godtagbar början av beviset	(+1p)
Logiskt genomförande av beviset, men ev någon svag punkt	(+1p)
Korrekt genomfört bevis	(+1p)