

Lösningsförslag

Tentamen i Matematik, del A, för Tekniskt basår

Kurskod: MVE425

Telefonvakt: Helena Johansson tel. 0739-803569

Datum: 27 okt 2015

Tid för tentamen: 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga

"I have discovered a truly remarkable proof which this margin is too small to contain."

(Pierre de Fermat, 1601 - 1665)

1. Avgör om följande utsaga och implikation är sanna eller falska (*Endast svar krävs*)

(a) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2, \forall x \in \mathbf{R}$ (2p)

Svar: Falskt, gäller ej för $x = 2$

(b) $P \implies Q$, där $P : x > -3$ och $Q : x \geq -3$ (2p)

Svar: Sant, ty $D_P = \{x : x > -3\} \subset D_Q = \{x : x \geq -3\}$

2. Förenkla och skriv följande uttryck på så enkel form som möjligt

(a) $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$ (3p)

Lösning: $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a} = \sqrt[3]{3a^2 \cdot 9a} = \sqrt[3]{3^3 a^3} = \sqrt[3]{3^3} \sqrt[3]{a^3} = 3a$

Alternativt: $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a} = (3a^2)^{1/3} (9a)^{1/3} = 3^{1/3} \cdot a^{2/3} \cdot 9^{1/3} \cdot a^{1/3} = 3^{1/3} \cdot a^{2/3} \cdot (3^2)^{1/3} \cdot a^{1/3} = 3^{1/3+2/3} \cdot a^{2/3+1/3} = 3a$

Svar: $3a$

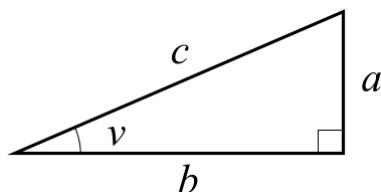
(b) $\frac{(90^3 \cdot 48)^{10}}{160^{15} \cdot 45^{15} \cdot 81^{10}}$ (4p)

Lösning: $\frac{(90^3 \cdot 48)^{10}}{160^{15} \cdot 45^{15} \cdot 81^{10}} = \frac{(2 \cdot 3^2 \cdot 5)^{30} \cdot (2^4 \cdot 3)^{10}}{(2^5 \cdot 5)^{15} \cdot (3^2 \cdot 5)^{15} \cdot (3^4)^{10}} =$
 $= \frac{2^{30} \cdot 3^{60} \cdot 5^{30} \cdot 2^{40} \cdot 3^{10}}{2^{75} \cdot 5^{15} \cdot 3^{30} \cdot 5^{15} \cdot 3^{40}} = 2^{70-75} \cdot 3^{70-70} \cdot 5^{30-30} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

Svar: $\frac{1}{32}$

3. Beräkna exakt $\sin v$ och $\cos v$ då $\tan v = \frac{9}{7}$. (3p)

Lösning: $\tan v = \frac{9}{7}$ innebär att motstående genom närliggande katet förhåller sig som $\frac{9}{7}$.



Vidare har vi att $\sin v = \frac{a}{c}$ och $\cos v = \frac{b}{c}$, där a betecknar motstående katet, b betecknar närliggande katet och c betecknar hypotenusan. Pythagoras sats ger $c = \sqrt{9^2 + 7^2} = \sqrt{130}$. Detta ger då $\sin v = \frac{9}{\sqrt{130}}$ och $\cos v = \frac{7}{\sqrt{130}}$

Svar: $\sin v = \frac{9}{\sqrt{130}}$ och $\cos v = \frac{7}{\sqrt{130}}$

4. Faktorisera polynomet $P(x) = 9x^3 + 21x^2 + 4x - 4$ (5p)

Lösning: Enligt satsen om heltalsrötter är en ev heltalsrot till $P(x) = 0$ en delare till -4 . Möjliga heltalsrötter är då $\pm 1, \pm 2$ och ± 4 . Prövar dessa: $P(-1) = 12 \neq 0, P(1) = 30 \neq 0, P(-2) = 0$, alltså är $x = -2$ en rot till $P(x) = 0$ och enligt faktorsatsen är då $x + 2$ en faktor till $P(x)$.

Dividera nu $P(x)$ med $(x + 2)$ för att hitta övriga faktorer.

$$\begin{array}{r}
 9x^2 + 3x - 2 \\
 x + 2 \overline{) 9x^3 + 21x^2 + 4x - 4} \\
 \underline{- 9x^3 - 18x^2} \\
 3x^2 + 4x \\
 \underline{- 3x^2 - 6x} \\
 -2x - 4 \\
 \underline{2x + 4} \\
 0
 \end{array}$$

$$\implies P(x) = 9x^3 + 21x^2 + 4x - 4 = (x + 2)(9x^2 + 3x - 2).$$

Undersök nu om $9x^2 + 3x - 2$ går att faktorisera genom att se om det finns reella rötter till $9x^2 + 3x - 2 = 0$.

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \iff 9(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}) = 0 \iff x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0.$$

Lösningsformeln för andragradsekvationer ger att

$$D = (\frac{1}{3})^2 - 4 \cdot (-\frac{2}{9}) = 1 > 0, \text{ alltså finns det två reella lösningar till an-}$$

dragradsekvationen, och dessa är $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2} = -\frac{1}{6} \pm \frac{1}{2}$

$$\implies x_1 = \frac{1}{3} \text{ och } x_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Detta medför att } x - \frac{1}{3} \text{ och } x + \frac{2}{3} \text{ är faktorer till } x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \implies 9x^2 + 3x - 2 = 9(x - \frac{1}{3})(x + \frac{2}{3}).$$

$$\textbf{Svar: } P(x) = 9(x + 2)(x - \frac{1}{3})(x + \frac{2}{3})$$

5. Lös olikheten $\frac{x+8}{x-1} > x$ (5p)

Lösning: $\frac{x+8}{x-1} > x \iff \frac{x+8}{x-1} - x > 0 \iff \frac{x+8}{x-1} - \frac{x(x-1)}{x-1} > 0 \iff$
 $\frac{x+8-x^2+x}{x-1} > 0 \iff \frac{-x^2+2x+8}{x-1} > 0$

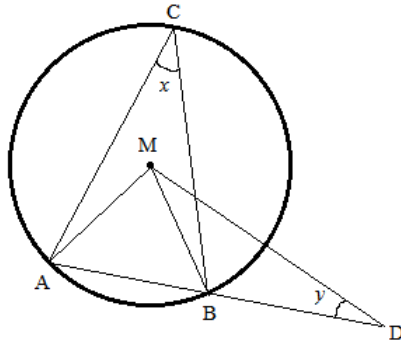
Sätt $R(x) = \frac{-x^2+2x+8}{x-1}$, då är $R(x) > 0$ om $-x^2 + 2x + 8 > 0$ och $x - 1 > 0$ samtidigt, eller $-x^2 + 2x + 8 < 0$ och $x - 1 < 0$ samtidigt. Detta undersöks tex mha teckentabell. Faktorisera först $-x^2 + 2x + 8$ för att hitta nollpunkter, dvs där polynomet byter tecken. $-x^2 + 2x + 8 = -(x+2)(x+4)$. Intressanta x -värden för $R(x)$ är $x = -2, x = 1$ och $x = 4$.

x	$<$	-2	$<$	1	$<$	4	$<$
$-(x+2)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$R(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$+$	0	$-$

Från tabellen får vi nu att $R(x) > 0$ då $x < -2$ och då $1 < x < 4$.

Svar: $\frac{x+8}{x-1} > x$ då $(x < -2) \vee (1 < x < 4)$

6. Cirkeln på bilden nedan beskrivs av ekvationen $x^2 + 3x + y^2 - 2y - 13 = 0$
 I cirkeln är triangeln ABC inskriven. Sträckan AB förlängs till punkten D så att BD har samma längd som cirkelns radie.



- (a) Bestäm cirkelns medelpunkt och radie (4p)

Lösning: Kvadratkomplettera uttrycket med avseende på x och y så att det kan skrivas på formen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ där (x_0, y_0) är cirkelns medelpunkt och R är cirkelns radie.

Vi får då $x^2 + 3x + y^2 - 2y - 13 = 0 \iff$
 $x^2 + 3x + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + y^2 - 2y + (\frac{2}{2})^2 - (\frac{2}{2})^2 - 13 = 0 \iff (x + \frac{3}{2})^2 +$
 $(y - 1)^2 = \frac{9}{4} + 14 \iff (x + \frac{3}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{65}{4}$

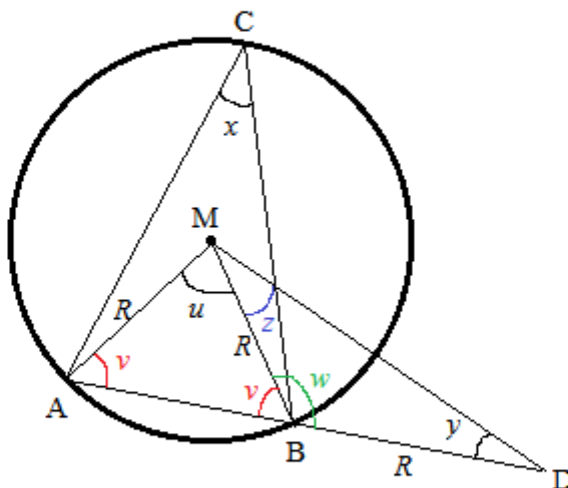
Så $x_0 = -\frac{3}{2}, y_0 = 1$ och $R = \frac{\sqrt{65}}{2}$

Svar: Medelpunkten är $(-\frac{3}{2}, 1)$ och radien är $R = \frac{\sqrt{65}}{2}$

(b) Om vinkeln x är 50° , hur stor är då vinkeln y ? (3p)

Lösning:

Enligt randvinkelsatsen är vinkeln $u = 2x \implies u = 100^\circ$. Vinkel u är toppvinkel i den likbenta triangeln AMB med basvinklar v , vinkelsumman i en triangel är $180^\circ \implies v = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$. Yttervinkelsatsen ger att $w = 180^\circ - v = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Eftersom sträckan BD är lika lång som cirkelns radie är även triangeln BMD likbent, vilket medför att vinklarna y och z är lika stora. Alltså är $y = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$.



Svar: $y = 20^\circ$ då $x = 50^\circ$.

7. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x - 6y + 4z = 3 \\ 3x + 6y + 5z = 7 \\ 4x - 2y + 6z = 5 \end{cases}$$
 med eliminationsmetoden. (4p)

Lösning:
$$\begin{cases} 2x - 6y + 4z = 3 \\ 3x + 6y + 5z = 7 \\ 4x - 2y + 6z = 5 \end{cases} \xrightarrow{1/2R_1} \begin{cases} x - 3y + 2z = \frac{3}{2} \\ 3x + 6y + 5z = 7 \\ 4x - 2y + 6z = 5 \end{cases} \xrightarrow{-3R_1 \rightarrow R_2; -4R_1 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = \frac{3}{2} \\ 15y - z = \frac{5}{2} \\ 10y - 2z = -1 \end{cases} \xrightarrow{1/15R_2} \begin{cases} x - 3y + 2z = \frac{3}{2} \\ y - \frac{1}{15}z = \frac{1}{6} \\ 10y - 2z = -1 \end{cases} \xrightarrow{3R_2 \rightarrow R_1; -10R_2 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{cases} x + \frac{9}{5}z = 2 \\ y - \frac{1}{15}z = -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3}z = -\frac{8}{3} \end{cases} \xrightarrow{-3/4R_3} \begin{cases} x + \frac{9}{5}z = 2 \\ y - \frac{1}{15}z = -\frac{1}{6} \\ z = 2 \end{cases} \xrightarrow{-9/5R_3 \rightarrow R_1; 1/15R_3 \rightarrow R_2} \begin{cases} x = -\frac{8}{5} \\ y = \frac{3}{10} \\ z = 2 \end{cases}$$

Svar: $x = -\frac{8}{5}, y = \frac{3}{10}, z = 2$

8. Undersök hur många lösningar ekvationen $|3x - 1| - |2x + 4| = K$ har för

olika värden på K . Skissa grafen till $|3x - 1| - |2x + 4|$ för att illustrera ditt svar.

(6p)

Lösning: För att kunna skissa grafen till uttrycket, och på så sätt undersöka antal lösningar för olika värden på K , behöver vi ta reda på hur uttrycket ser ut för olika värden på x .

Bestäm först brytpunkterna till uttrycket $|3x - 1| - |2x + 4|$. Dessa fås gnm att skriva om $|3x - 1| - |2x + 4| \iff 3|x - \frac{1}{3}| - 2|x + 2| \implies$ brytpunkter i $x = \frac{1}{3}$ och $x = -2$. Studera därför de tre intervallen: I: $x < -2$, II: $-2 \leq x < \frac{1}{3}$ och III: $x \geq \frac{1}{3}$

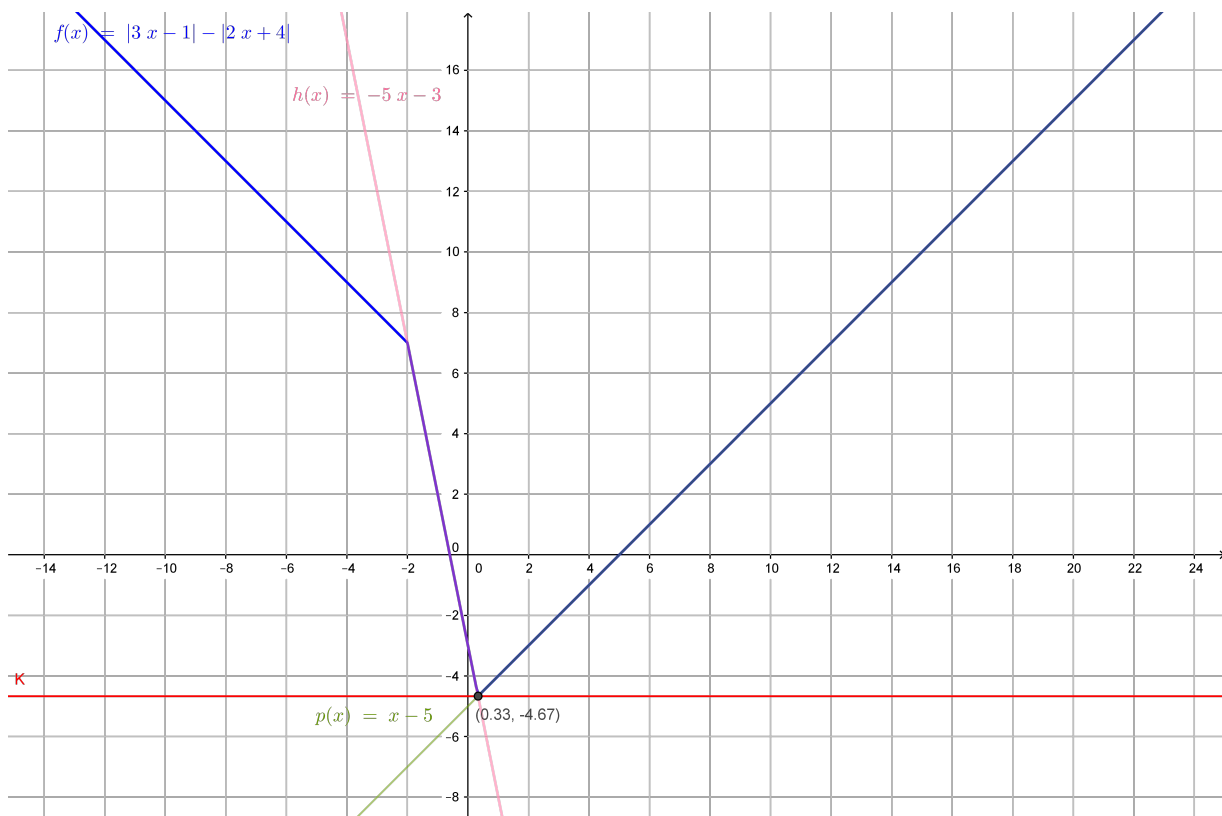
I: $3x - 1 < 0 \implies |3x - 1| = -(3x - 1)$ och $2x + 4 < 0 \implies |2x + 4| = -(2x + 4)$.

Då är $|3x - 1| - |2x + 4| = -(3x - 1) - (-(2x + 4)) = -3x + 1 + 2x + 4 = -x + 5$. Så i intervall I beskrivs uttrycket av den räta linjen $y = -x + 5$.

II: $3x - 1 < 0 \implies |3x - 1| = -(3x - 1)$ och $2x + 4 \geq 0 \implies |2x + 4| = 2x + 4$. Då är $|3x - 1| - |2x + 4| = -(3x - 1) - (2x + 4) = -3x + 1 - 2x - 4 = -5x - 3$. Så i intervall II beskrivs uttrycket av den räta linjen $y = -5x - 3$.

III: $3x - 1 \geq 0 \implies |3x - 1| = 3x - 1$ och $2x + 4 \geq 0 \implies |2x + 4| = 2x + 4$. Då är $|3x - 1| - |2x + 4| = 3x - 1 - (2x + 4) = 3x - 1 - 2x - 4 = x - 5$. Så i intervall III beskrivs uttrycket av den räta linjen $y = x - 5$.

$$\text{Skissa nu } |3x - 1| - |2x + 4| = \begin{cases} -x + 5 & : x < -2 \\ -5x - 3 & : -2 \leq x < \frac{1}{3} \\ x - 5 & : x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$



Riktningskoefficienterna för linjerna i både intervall I och II är negativa, men för linjen i intervall III är riktningskoefficienten positiv. Så om K är mindre än y -värdet i skärningspunkten mellan linjerna $y = -5x - 3$ (intervall II) och $y = x - 5$ (intervall III) kommer ekvationen inte ha någon lösning. Om K är större än y -värdet i skärningspunkten kommer ekvationen ha två lösningar, och om K är lika med skärningspunktens y -värde har ekvationen en lösning. Beräkna därför skärningspunkten, dvs lös ekvationssystemet $\begin{cases} y = -5x - 3 \\ y = x - 5 \end{cases}$. Får då $-5x - 3 = x - 5 \iff x = \frac{1}{3} \implies y = \frac{1}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{14}{3}$.

Svar: Ekvationen $|3x - 1| - |2x + 4| = K$ saknar lösning om $K < -\frac{14}{3}$, har en lösning om $K = -\frac{14}{3}$ och har två lösningar om $K > -\frac{14}{3}$.

9. Härled Lösformeln för en andragradsekvation, samt ange i vilket fall reella rötter saknas. (4p)

Lösning: Se avsnitt 8.6

10. Formulera och bevisa Satsen om heltalsrötter. (5p)

Lösning: Se avsnitt 9.3

Lycka till!