

Tentamensskrivning i matematik del A 20111017

Kurskod: LMA163

Examinator: Jonny Lindström tel. 0733 607040

Tid för tentamen: 08.30-12.30

Hjälpmedel: Inga

1. En rät linje L_1 går genom punkterna $(0, 1)$ och $(2, 6)$. En annan rät linje L_2 går genom punkterna $(0, 2)$ och $(3, 1)$. Bestäm skärningspunkten mellan L_1 och L_2 , samt rita de båda linjerna i samma koordinatsystem. (6p)

2. För vilka värden på konstanten k betyder ekvationen $\frac{x^2}{k+4} + \frac{y^2}{3-k} = 1$ en ellips? (4p)

3. Lös olikheten $\frac{x+4}{x^2+x-12} \leq 0$. (5p)

4. Lös ekvationerna

a) $\frac{4-j}{2+j} = z - 2$ b) $3z - 4\bar{z} = 7j - 1$.

Skriv lösningarna på formen $x + jy$. (8p)

5. Lös ekvationen $\frac{x^2+4}{x-2} = \frac{x^3}{x^2-x-2}$ (5p)

6. Ekvationen $z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6 = 0$ har en rot $z = j$. Bestäm ekvationens övriga rötter. (6p)

7. Rita grafen till kurvan $y = |x^2 - x - 42|$. (6p)

8.

a) Formulera och bevisa faktorsatsen.

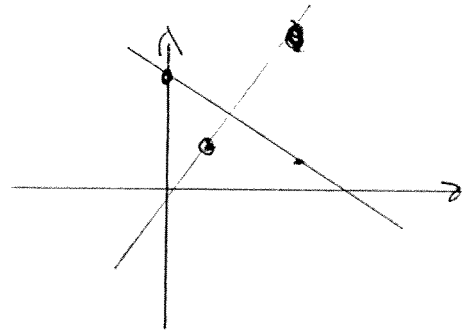
b) Visa att om två linjer L_1 och L_2 skär varandra under rät vinkel, gäller det för riktningskoefficienterna k_1 och k_2 att $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Rita figur! (10p)

$$\textcircled{1} \quad k = \frac{6-1}{2-0} = \frac{5}{2}$$

$$y_1 - 1 = \frac{5}{2} (x - 0)$$

(=)

$$y_1 = \frac{5}{2}x + 1$$



$$k = \frac{1-2}{3-0} = -\frac{1}{3}$$

$$y_2 - 2 = -\frac{1}{3} (x - 0)$$

(=)

$$y_2 = -\frac{1}{3}x + 2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x + 1 = -\frac{1}{3}x + 2$$

(=)

$$\frac{5}{2}x + \frac{1}{3}x = 1$$

(=)

$$\frac{15x + 2x}{6} = 1$$

(=)

$$17x = 6$$

(=)

$$x = \frac{6}{17}$$

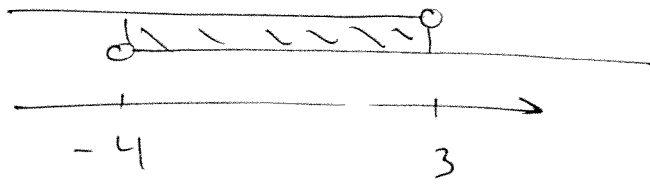
$$y = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{17} + 1 =$$

$$= \frac{15}{17} + \frac{17}{17} = \frac{32}{17}$$

$$(x, y) = \left(\frac{6}{17}, \frac{32}{17} \right)$$

②

$$k + 4 > 0 \wedge 3 - k > 0$$



SUMMARY: $-4 < k \leq 3$

③

$$\frac{x + 4}{(x + 4)(x - 3)} \leq 0$$

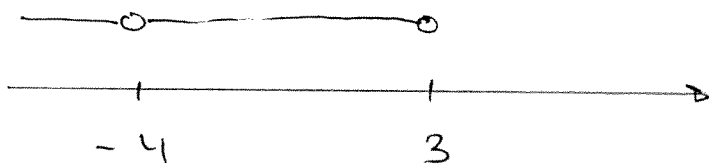
$$x \neq -4$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{x - 3} \leq 0$$

$\Rightarrow$

$$x < 3$$



$$x < -4 \vee -4 < x < 3$$

4

$$a) \frac{4-j}{2+j} = z - 2$$

$\Rightarrow$

$$z = 2 + \frac{4-j}{2+j} = \frac{2(2+j)}{2+j} + \frac{4-j}{2+j}$$

$$= \frac{4 + 2j + 4 - j}{2+j} = \frac{(8+j)(2-j)}{(2+j)(2-j)}$$

$$= \frac{16 - 8j + 2j + 1}{5} = \frac{17 - 6j}{5}$$

$$b) z = x + jy$$

$$\Rightarrow 3(x+jy) - 4(x-jy) = 7j - 1$$

$$\Rightarrow 3x + j3y - 4x + j4y - 7j + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{-x + 1}_{=0} + j(\underbrace{7y - 7}_{=0}) = 0$$

$$x = 1 \quad y = 1$$

$$\Rightarrow \underline{z = 1 + j}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{x^2 + 4}{x - 2} - \frac{x^3}{(x - 2)(x + 1)} = 0$$

(=)

$$\frac{(x^2 + 4)(x + 1) - x^3}{(x - 2)(x + 1)} = 0$$

(=)

$$\frac{\cancel{x^3} + 4x + x^2 + 4 - \cancel{x^3}}{(x - 2)(x + 1)} = 0$$

(=)

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{(x - 2)(x + 1)} = 0$$

(=)

$$\frac{(x + 2)^2}{(x - 2)(x + 1)} = 0$$

$$x = -2$$

$$\textcircled{6} \quad z_1 = j \quad z_2 = -j \quad \Rightarrow \quad z^2 + 1$$

$$\begin{array}{r}
 z^2 - z - 6 \\
 \hline
 z^2 + 1 \quad \overline{) \quad z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6} \\
 \underline{-(z^4 + z^2)} \\
 -z^3 - 6z^2 - z - 6 \\
 \underline{-(-z^3 - z)} \\
 -6z^2 - 6 \\
 \underline{-(-6z^2 - 6)} \\
 0
 \end{array}$$

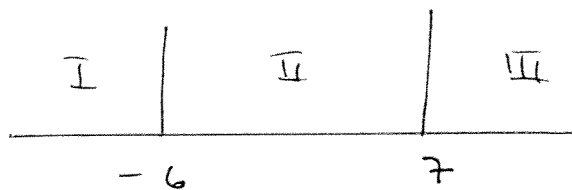
$$\text{Lös} \quad z^2 - z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow z_3 = 3 \quad z_4 = -2$$

$$\textcircled{7} \quad y = |x+6||x-7|$$



I. $x < -6$: $|x+6| = -(x+6)$; $|x-7| = -(x-7)$

$$\Rightarrow y = x^2 - x - 42$$

II. $-6 \leq x < 7$: $|x+6| = (x+6)$; $|x-7| = -(x-7)$

$$\Rightarrow y = -(x^2 - x - 42) = -x^2 + x + 42$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 42$$

~~III.~~

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{169}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{169}{4}$$

$$y_{\max} = \frac{169}{4} \quad \text{d a} \quad x = \frac{1}{2}$$

III. $x \geq 7$: $|x+6| = x+6$; $|x-7| = x-7$

$$\Rightarrow y = x^2 - x - 42$$

