LÖSNINGAR

Kurskod: MVE425a

LINDHOLMEN AUGUSTI 2018

Hjälpmedel: pennor, radergummi och linjal

Betygsgränser: $20 - 31 \Rightarrow 3$; $32 - 41 \Rightarrow 4$; $42 - 50 \Rightarrow 5$

Examinator: Torbjörn Lundh

1. (a) Beskriv vad ett motsägelsebevis är. (2p)

   (b) Ge ett konkret exempel på ett motsägelsebevis. (4p)

   Lösningstips: Se boken sidorna 12. Ett exempel på ett kort motsägelsebevis av att $\sqrt{3} < 2$ kan göras på följande sätt. Antag att motsatsen gäller, dvs att $\sqrt{3} \geq 2$. Eftersom $2 > 0$ så kan vi kvadrera båda leden utan att vända på olikheten, dvs $3 \geq 4$ vilket uppenbarligen är en motsägelse. Dvs antagandet är falskt och $\sqrt{3} < 2$ gäller. (Alternativt, om du gjorde näst sista uppgiften, kan du bara hänvisa dit som ett exempel. Det är helt ok att ”dubbelräkna” på det viset. Och det är ofta klokt att kolla igenom alla uppgifter innan du börjar.)

2. Förenkla så långt det går

   (a)
$$\frac{x^2 - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1} + \sqrt{x}(x+1)(1+\sqrt{x}).$$
(3p)

   (b)
$$\frac{x^3 + 4x^2 - 3x - 18}{4x^2 + 4x - 24}.$$
(4p)

   Lösningsskiss:

   (a) Förläng första termen med konjugatet för att få den till
$$\frac{(x^2 - 1)x(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1)}{1 - x}$$
   vilket sedan ger hela uttryckets värde noll.

   (b) Nämnaren kan först faktoriseras till $4(x-2)(x+3)$. Genom insättning ser vi sedan att både $x = 2$ och $x = -3$ är rötter till täljaren, vilket gör att vi kan faktorisera täljaren till $(x+3)^2(x-2)$ och då blir tillslut hela uttrycket
$$\frac{x^3 + 4x^2 - 3x - 18}{4x^2 + 4x - 24} = \frac{x+3}{4}.$$
   Alternativt, och mycket snabbare, chansa och gör en polynomdivision och få en rest noll.

3. Hitta lösningsmängden till följande ekvationssystem

(a)

$$\begin{cases} x - 3y + 2z &= 4 \\ x - y + z &= -1 \\ 2x - 2y + 2z &= 2 \end{cases}$$

(4p)

(b)

$$\begin{cases} x - 3y + 2z &= 4 \\ x - y + z &= -1 \\ 2x - y - 2z &= 2 \end{cases}$$

(4p)

Lösningsskiss:

(a) De två sista ekvationernas gör att lösning saknas för detta system.

(b) Genom elementära radoperationer ges lösningen av

$$x = -10, y = 4, z = 13.$$

4. Ge lösningsmängden för följande olikhet

$$x + |2x - 3| \geq |x - 1| + 2.$$

(4p)

Lösningsskiss: Vi delar upp tallinjen i tre intervall: $(-\infty, 1)$, $[1, \frac{3}{2})$ och $[\frac{3}{2}, \infty)$. I det vänstra intervallet är alla x en lösning, i mittenintervallet är endast $x = 1$ en lösning och i högra intervallet är $x \geq 2$ en lösning. Tillsamman får vi att lösningsmängden är

$$(-\infty, 1] \cup [2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \vee x \geq 2\}.$$

5. Vad är $\sin v$ om $\cos v = \frac{1}{3}$? (4p)

Lösningsskiss: Trigonometriska ettan ger att

$$\sin^2 v + \frac{1}{9} = 1.$$

Vilket ger att

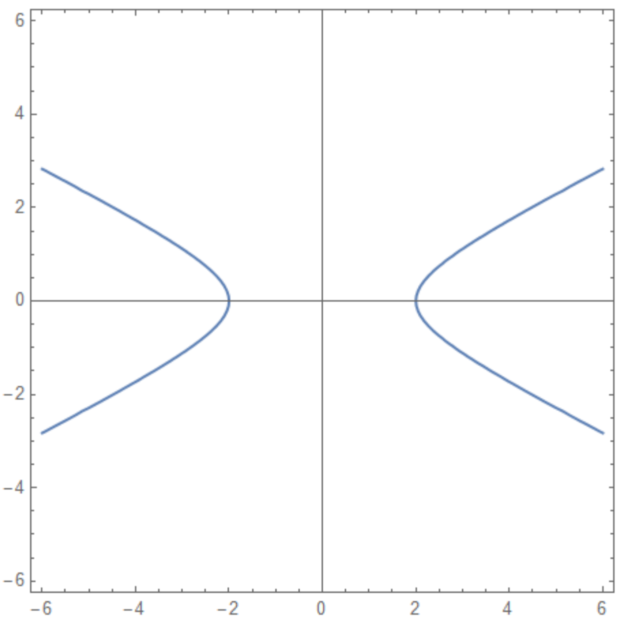
$$\sin v = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

6. (a) Rita kurvan $\frac{1}{4}x^2 = (1 + y)(1 - y)$. (3p)

(b) Vilken typ av kägelsnitt är detta? (1p)

(c) Beskriv i ord hur man geometriskt kan konstruera denna kurva utgående från avstånd från två basala geometriska objekt. (3p)

Lösningsskiss: Detta är en hyperbel med ekvationen $\frac{x^2}{2^2} - y^2 = 1$, dvs med skärning med x-axeln i punkterna $x = \pm 2$ och med asymptoter $y = \pm\frac{1}{2}x$. En hyperbel kan beskrivas som de punkter i planet vars differens av avstånden till två givna brännpunkter är konstant. Se figur 1 nedan.



Figur 1: Hyperbeln $\frac{x^2}{2^2} - y^2 = 1$

7. En glasstrut har en cirkulär omkrets vid rånets kant med längd Ω cm och där rånets ytteryta är A cm^2. Vi antar att själva glassen fyller ut hela rånet plus att det ligger en halvsfärskula på toppen men kant i kant med rånet. Hur stor är glassvolymen? (6p)

   Lösningsskiss: Glassrånets mantelyta är $A = \pi r s$, där r är radien av den cirulära öppningen av rånet och s är längden från spetsen av rånet till dess kant längs rånytan. Höjden av det koniska rånet är då $h = \sqrt{s^2 - r^2}$ och omkretsen Ω av rånet är $2\pi r$, vilket ger att

   $$r = \frac{\Omega}{2\pi} \text{ och } s = \frac{A}{\pi r} = \frac{2A}{\Omega}.$$

   Den totala glassvolymen blir då

   $$V = \frac{Bh}{3} + \frac{1}{2}\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\pi r^2}{3}\big(h + 2r\big) = \frac{\Omega^2}{12\pi}\left(\sqrt{\frac{4A^2}{\Omega^2} - \frac{\Omega^2}{4\pi^2}} + \frac{\Omega}{\pi}\right).$$

8. Visa **Euklides sats** att det finns oändligt många primtal. (5p)

9. Formulera och bevisa **trigonometriska ettan** för spetsiga vinklar. (3p)