

# Sammanställning av bevis

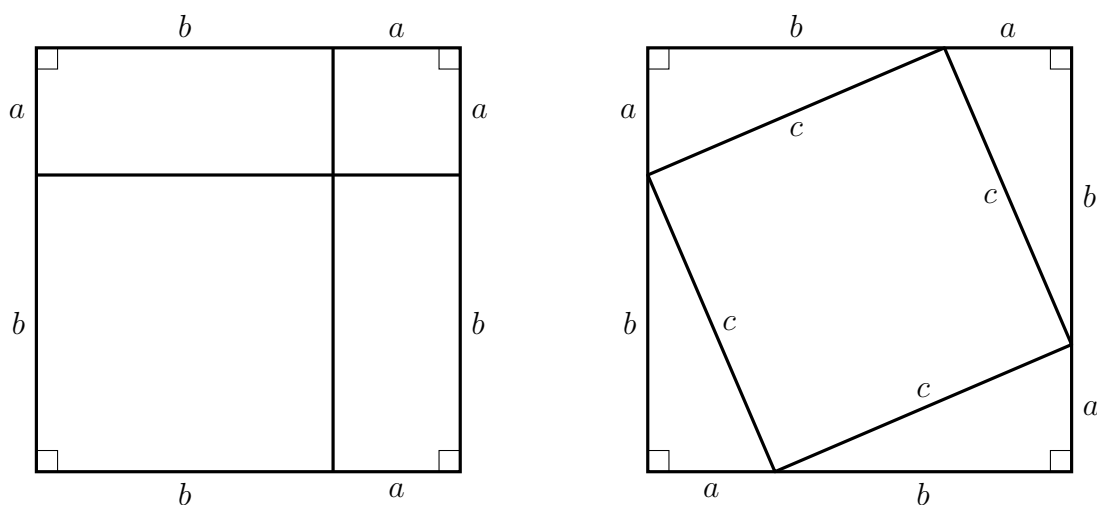
MVE425 Matematik, del A, hösten 2018

## 1 Pythagoras sats (avsnitt 5.4)

**Sats** (Pythagoras sats). *I en rätvinklig triangel, vars kateter har längderna  $a$  och  $b$ , och vars hypotenusa har längden  $c$ , gäller sambandet*

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1)$$

*Bevis.* Betrakta en kvadrat vars sidlängd är  $a + b$ , och dela in den på två olika sätt enligt figurerna nedan:



I den högra figuren observerar vi att det blir en kvadrat med sidan  $c$  inuti den stora kvadraten, eftersom alla sidorna är lika långa och vinkeln i varje hörn blir  $90^\circ$ .

Sammanlagda arean  $A$  måste vara samma i båda fallen. I vänstra figuren kan vi beräkna arean genom att addera areorna för de fyra rektanglarna (två är kvadrater), och vi får

$$A = ba + a^2 + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2. \quad (2)$$

I högra figuren har vi en kvadrat i mitten samt fyra trianglar med samma area, och sammanlagt blir

$$A = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab. \quad (3)$$

De två uttrycken för arean ger oss

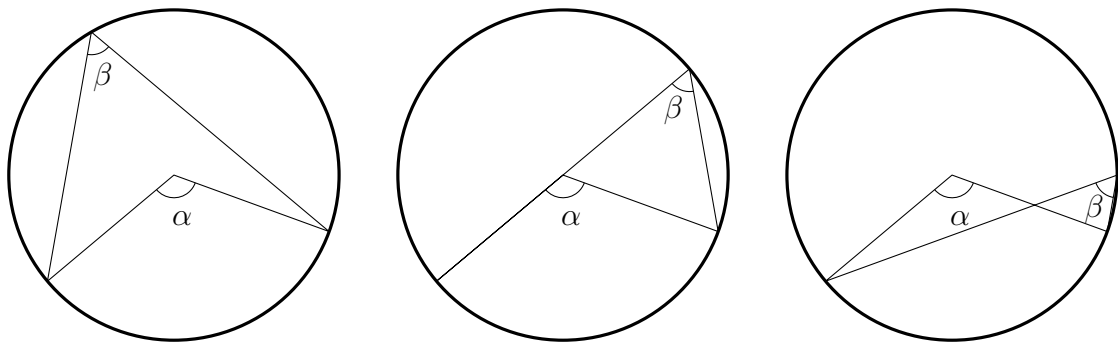
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2, \quad (4)$$

vilket visar satsen. □

## 2 Randvinkelsatsen (avsnitt 5.5)

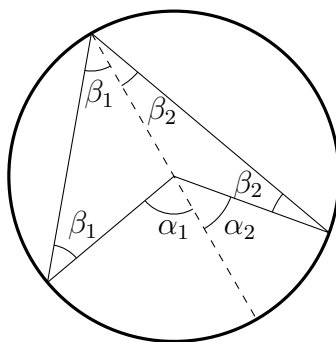
**Sats** (Randvinkelsatsen). *Medelpunktsvinkeln till en cirkelbåge är dubbelt så stor som en randvinkel till samma cirkelbåge.*

Geometriskt sett finns det tre olika fall att betrakta:



Ni behöver bara kunna bevisa satsen för fallet som visas i den vänstra figuren ovan.

*Bevis.* Drag en diameter genom randvinkelns vinkelspets, enligt figuren.



Denna kommer att dela randvinkeln i två delar,  $\beta_1$  och  $\beta_2$ , så att  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ , och på samma sätt delas även medelpunktsvinkeln  $\alpha$  i två delar,  $\alpha_1$  och  $\alpha_2$ , så att  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ . På vardera sida om diametern uppstår likbenta trianglar, och i båda dessa är de två vinklarna ute vid cirkeln lika stora.

I den vänstra triangeln är två vinklar  $\beta_1$ , och den tredje vinkeln, som är en sidovinkel till  $\alpha_1$ , är alltså  $180^\circ - 2\beta_1$ . Alltså är  $\alpha_1 = 2\beta_1$ . Med ett likadant resonemang för den högra triangeln får vi  $\alpha_2 = 2\beta_2$ .

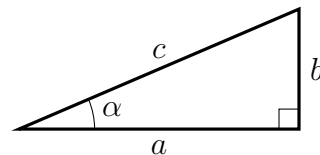
Vi har nu att  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$ , vilket ju var det som skulle bevisas.  $\square$

### 3 Trigonometriska ettan (avsnitt 6.3)

**Sats** (Trigonometriska ettan för spetsiga vinklar). Om  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  gäller det att

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \quad (5)$$

*Bevis.* Vi utgår från följande rätvinkliga triangel:



Pythagoras sats ger oss  $a^2 + b^2 = c^2$ , som vi kan skriva om enligt

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1. \quad (6)$$

Enligt definitionen är  $\cos \alpha = \frac{a}{c}$  och  $\sin \alpha = \frac{b}{c}$ , så alltså är  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .  $\square$

### 4 Kuberingsreglerna (avsnitt 8.2)

Första kuberingsregeln säger att  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , och bevisas genom att multiplicera ihop parenteserna:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b) \underbrace{(a+b)^2}_{\text{kvadreringsregeln}} = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned} \quad (7)$$

Andra kuberingsregeln säger att  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ , och bevisas också genom att multiplicera ihop parenteserna:

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= (a - b) \underbrace{(a - b)^2}_{\text{kvadreringsregeln}} = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}\tag{8}$$

## 5 Konjugatregeln och $a^3 - b^3$ (avsnitt 8.4)

Konjugatregeln säger att  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , och bevisas genom att helt enkelt multiplicera ihop parenteserna. Detta ger

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.\tag{9}$$

Motsvarande regel för  $a^3 - b^3$  är  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ , som också bevisas genom att multiplicera ihop parenteserna. I detta fallet ger det

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.\tag{10}$$

(Som bonus får vi  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$  genom att byta ut alla  $b$  mot  $-b$ .)

## 6 $pq$ -formeln (avsnitt 8.6)

**Sats** ( $pq$ -formeln). Om  $p^2 \geq 4q$  ges lösningarna (eller lösningen, om  $p^2 = 4q$ ) till andragradsekvationen  $x^2 + px + q = 0$  av

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.\tag{11}$$

*Bevis.* Vi kvadratkompletterar vänsterledet i ekvationen, och får

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.\tag{12}$$

Detta skall vara lika med noll, dvs

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ x + \frac{p}{2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},\end{aligned}\tag{13}$$

som gäller under förutsättning att uttrycket under rottecknet inte är negativt.  $\square$

## 7 Faktorsatsen (avsnitt 9.3)

**Sats** (Faktorsatsen). Om  $x = a$  är ett nollställe till polynomet  $p(x)$ , dvs  $p(a) = 0$ , så är  $x - a$  en faktor i  $p(x)$ . (Det finns alltså ett polynom  $q(x)$  sådant att  $p(x) = (x - a)q(x)$ .)

*Bevis.* Enligt divisionsalgoritmen (polynomdivision) vet vi att det finns entydiga polynom  $q(x)$  och  $r(x)$  sådana att

$$p(x) = q(x)(x - a) + r(x), \quad (14)$$

där  $\text{grad } r(x) < \text{grad}(x - a) = 1$ . Eftersom  $\text{grad } r(x) < 1$  måste  $r(x)$  vara en konstant. Samtidigt är

$$0 = p(a) = q(a)(a - a) + r(a) = r(a), \quad (15)$$

så  $r(x)$  måste vara konstanten noll. Alltså är  $p(x) = q(x)(x - a)$ .  $\square$

## 8 Satsen om heltalsrötter (avsnitt 9.3)

**Sats.** Låt  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  vara ett polynom med heltalskoefficienter, dvs talen  $a_0, a_1, \dots, a_n$  är heltal. Om  $x = k$  är en heltalslösning till ekvationen  $p(x) = 0$  så gäller det att  $k$  är en faktor i  $a_0$ .

*Bevis.* Enligt förutsättningarna är  $p(k) = 0$ , dvs

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = 0. \quad (16)$$

Genom att flytta över allt utom  $a_0$  till högerledet och sedan bryta ut  $k$  får vi

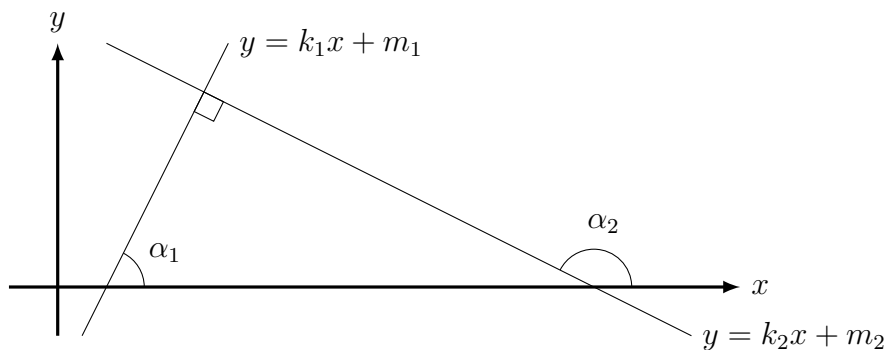
$$\begin{aligned} a_0 &= -a_n k^n - a_{n-1} k^{n-1} - \dots - a_1 k \Leftrightarrow \\ a_0 &= k(-a_n k^{n-1} - a_{n-1} k^{n-2} - \dots - a_1). \end{aligned} \quad (17)$$

Eftersom hela parenteserna blir ett heltal visar detta att  $k$  är en faktor i  $a_0$ .  $\square$

## 9 Linjer som skär under rät vinkel (avsnitt 12.5)

**Sats.** Linjerna  $y = k_1 x + m_1$  och  $y = k_2 x + m_2$  skär varandra under rät vinkel precis då  $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ .

*Bevis.* Om två linjer skär varandra under rät vinkel (och inte är parallella med koordinataxlarna) måste den ena linjen luta uppåt och den andra nedåt. Antag att  $y = k_1 x + m_1$  lutar uppåt och har lutningsvinkel  $\alpha_1$ , medan  $y = k_2 x + m_2$  lutar nedåt och har lutningsvinkel  $\alpha_2$ , som i figuren nedan.



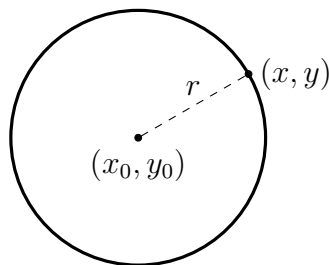
Eftersom  $y = k_1x + m_1$  lutar uppåt gäller  $k_1 = \tan \alpha_1$ , och eftersom  $y = k_2x + m_2$  lutar nedåt gäller  $k_2 = -\tan(180^\circ - \alpha_2)$ . Detta, tillsammans med att  $\alpha_1$  är komplementvinkel till  $180^\circ - \alpha_2$ , ger att

$$k_2 = -\tan(180^\circ - \alpha_2) = -\cot \alpha_1 = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = -\frac{1}{k_1}, \quad (18)$$

vilket alltså visar att  $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ . □

## 10 Cirkelns ekvation utifrån figur (avsnitt 14.2)

Betrakta en cirkel med radie  $r$  och medelpunkt i  $(x_0, y_0)$ , som i figuren.



En godtycklig punkt  $(x, y)$  på cirkeln har, enligt definitionen, avståndet  $r$  till medelpunkten  $(x_0, y_0)$ . Med hjälp av avståndsformeln kan detta skrivas

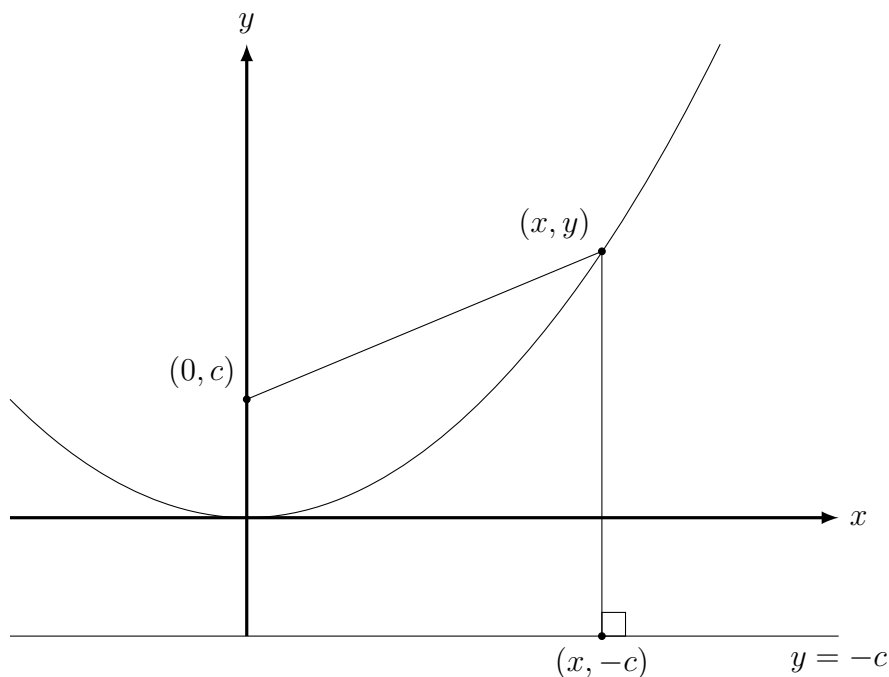
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r, \quad (19)$$

och efter kvadrering av båda sidor får vi cirkelns ekvation:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (20)$$

## 11 Parabelns ekvation utifrån figur (avsnitt 14.3)

Betrakta en parabel med brännpunkt i  $(0, c)$  och med styrlinje  $y = -c$ , som i figuren.



Parabeln består enligt definitionen av alla punkter vars avstånd till brännpunkten  $(0, c)$  är lika stort som avståndet till linjen  $y = -c$ . Den punkt på linjen  $y = -c$  som ligger närmst  $(x, y)$  är punkten  $(x, -c)$ .

Med hjälp av avståndsformeln får vi

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-c))^2} && \Leftrightarrow \\ \sqrt{x^2 + (y-c)^2} &= \sqrt{(y+c)^2}, && (21)\end{aligned}$$

som efter kvadrering ger

$$\begin{aligned}x^2 + (y-c)^2 &= (y+c)^2 && \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 - 2cy + c^2 &= y^2 + 2cy + c^2 && \Leftrightarrow \\ x^2 &= 4cy && \Leftrightarrow \\ y &= \frac{1}{4c}x^2. && (22)\end{aligned}$$

Sätter vi  $k = \frac{1}{4c}$  får vi parabelns ekvation  $y = kx^2$ .