

Tenta LMA164B 2011-12-17: lösningsförslag.

1. (a) $\lg(14 - x)$ är definierat då $14 - x > 0$, $\lg(x - 3)$ är definierat då $x - 3 > 0$. Detta ger att $f(x)$ är definierad då $3 < x < 14$, dvs $\mathcal{D}_f = (3, 14)$.

Svar: $\mathcal{D}_f = (3, 14)$

- (b) Skriv om med log-lagar:

$$\lg(14 - x) - \lg(x - 3) = 1$$

$$\lg \frac{14 - x}{x - 3} = \lg 10$$

$$\frac{14 - x}{x - 3} = 10$$

$$14 - x = 10(x - 3)$$

$$11x = 44$$

$$x = 4$$

Svar: $x = 4$

2. (a) $y(t) = 20000$ ger:

$$20000 = 2000 \cdot 10^{0,2t}$$

$$10^{0,2t} = 10^1$$

$$0,2t = 1$$

$$t = 5$$

Svar: **Efter 5 timmar.**

- (b) $y(t) = 40000$ ger:

$$40000 = 2000 \cdot 10^{0,2t}$$

$$10^{0,2t} = 20$$

$$0,2t = \lg 20$$

$$t = 5 \lg 20$$

Svar: **Efter $5 \lg 20$ ($\approx 6,5$) timmar.**

3. (a)

$$\sin 5x = \sin(60^\circ - x)$$

$$5x = 60^\circ - x + n \cdot 360^\circ \text{ eller } 5x = 180^\circ - (60^\circ - x) + n \cdot 360^\circ, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$6x = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ eller } 4x = 120^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x = 10^\circ + n \cdot 60^\circ \text{ eller } x = 30^\circ + n \cdot 90^\circ$$

$$\text{Svar: } \mathbf{x = 10^\circ + n \cdot 60^\circ \text{ eller } \mathbf{x = 30^\circ + n \cdot 90^\circ, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

(b)

$$3\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = c\sin(x + \phi) = (c\sin\phi)\cos x + (c\cos\phi)\sin x$$

Detta ger

$$\begin{cases} c\sin\phi &= 3\sqrt{3} \\ c\cos\phi &= 3 \end{cases}$$

varmed $c = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$ och $\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \sqrt{3}$ ger $\phi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, eftersom ϕ ligger i första kvadranten (sinus och cosinus är positiva).

$$\text{Svar: } \mathbf{3\sin x + 3\sqrt{3}\cos x = 6\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 6\sin(x + 60^\circ)}$$

4. Vi sätter $z = re^{iv}$ och skriver ekvationen i polär form:

$$z^4 = -16 \iff (re^{iv})^4 = 16e^{i(\pi+n\cdot 2\pi)} \iff r^4 e^{i4v} = 16e^{i(\pi+n\cdot 2\pi)}$$

$$\iff \begin{cases} r^4 &= 16 \\ 4v &= \pi + n \cdot 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r &= 2 \\ v &= \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Vi har därmed lösningarna i exponentiell polär form:

$$z = 2e^{i(\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2})}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Insättning av vardera n -värdet ger

$$z = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z = 2(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z = 2(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z = 2(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Kunskapen om att de fyra rötterna bildar en kvadrat på cirkeln $|z| = 2$ kan också användas för att snabbt få de tre senare rötterna ur den första.

$$\text{Svar: } \mathbf{z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.}$$

5. (a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - x} &= \text{konjugatförlängning} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x^2 - x)(\sqrt{x+3} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3) - 4}{x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{4}$

(b) Vi bryter ut x^2 ur rotuttrycket och använder att $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ då $x < 0$:

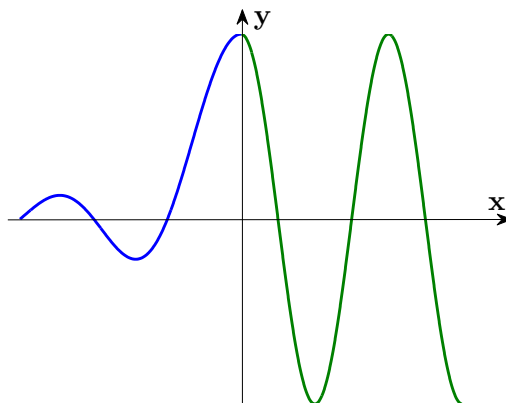
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 4\end{aligned}$$

Svar: 4

6. Att f är kontinuerlig i $x = 0$ innebär att $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, vilket alltså ska kollas. Eftersom $f(0) = \cos 0 = 1$ och $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x$ (höger- och vänstergränsvärden båda $= f(0)$), så är tydligen $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Svar: **Ja, funktionen är kontinuerlig i noll.**

Så här ser grafen ut. Kontinuiteten visar sig genom att kurvan "hänger ihop" i $x = 0$. Man kan också visa att f är deriverbar med $f'(0) = 0$, vilket kan anas i figuren - kurvan ser ut att ha en horisontell tangent i $x = 0$.



7. Vi skriver om $f(x)$ utan beloppstecken:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(-x+2) = -x^3+4x & \text{om } x < 2 \\ x^2(x-2) = x^3-2x^2 & \text{om } x \geq 2 \end{cases}$$

Derivatan existerar åtminstone för $x \neq 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2+4x & \text{om } x < 2 \\ 3x^2-4x & \text{om } x > 2 \end{cases}$$

Insättning av $x = 2$ i vardera uttrycket ger oss de ensidiga derivatorna:

$$f'_-(2) = -4, \quad f'_+(2) = 4$$

med olika värden, så derivatan existerar inte i $x = 2$.

Svar: **Ej deriverbar i $x = 2$. $f'_-(2) = -4$, $f'_+(2) = 4$**

8. Vi tar reda på koordinaterna för A och B :

Skärningspunkterna med x-axeln ges av $y = 0 \iff 16 - x^2 = 0 \iff x = \pm 4$.

Eftersom A är skärningspunkten med *negativa* x-axeln, så är $x = -4$ och $A = (-4, 0)$.

Skärningspunkt med y-axeln ges av $x = 0 \iff y = 16$. Alltså: $B = (0, 16)$.

Riktningskoefficienten för linjen genom A och B är då $k = \frac{16-0}{0-(-4)} = 4$.

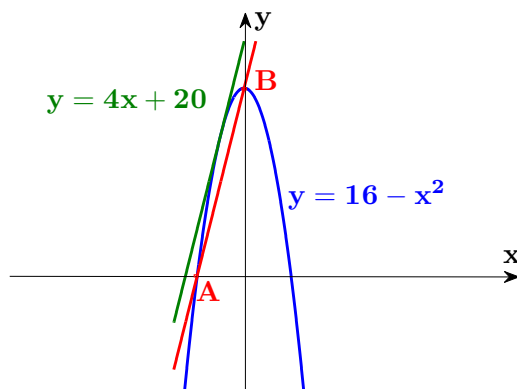
Då vår sökta tangent ska ha samma riktningskoefficient, och då denna ges av derivatan av $f(x) = 16 - x^2$ i tangeringspunkten $x = a$, så är $f'(a) = 4 \iff -2a = 4 \iff a = -2$.

Tangeringspunkten är därför $(-2, 12)$ och tangentens ekvation är:

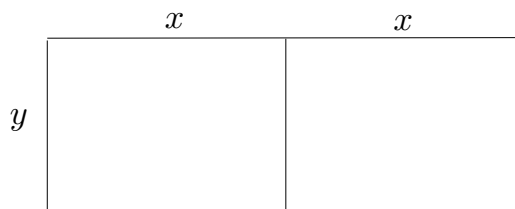
$$y - 12 = 4(x - (-2)) \iff y = 4x + 20$$

.

Svar: **$y = 4x + 20$**



9. Vi tecknar omkretsen L som en funktion av den ena sträckan x (enligt figuren), varvid vi använder villkoret att arean är given för att lösa ut sidan y uttryckt i x .



$$L = 4x + 3y, \quad 2xy = 2400 \Rightarrow y = \frac{1200}{x}$$

$$\Rightarrow L(x) = 4x + \frac{3600}{x}, \quad x > 0$$

Derivatans nollställe(n) söks:

$$L'(x) = 4 - \frac{3600}{x^2}, \quad L'(x) = 0 \iff x^2 = 900 \Rightarrow x = 30, \quad y = 40$$

Vi gör en teckentabell för att tolka derivatans betydelse:

x	$<$	30	$<$
$L'(x)$	$-$	0	$+$
$L(x)$	$\searrow$	240	$\nearrow$

Vi ser att vi har funnit ett lokalt minimum, vilket samtidigt måste vara det minimum för alla $x > 0$. Rektangelns sidor ska vara $2x = 60$ m och $y = 40$ m.

Svar: Den minimala stängsellängden blir 240 m och då ska de tre parallella stängselsträckorna vara 40 m, de andra två ska vara 60 m.