

Tenta LMA164BC 2012-02-17: lösningsförslag.

1. (a) $L = 100 \Rightarrow 10 \lg I = -20 \Rightarrow \lg I = -2 \Rightarrow \mathbf{I = 10^{-2} W/m^2}$
(b) Vi observerar först att uttrycken i ekvationen bara är definierade om $x > 0$. Med logaritmlagarna kan vi skriva om ekvationen:

$$2 \ln x - \ln 4 = \ln(3x + 16) \iff \ln x^2 = \ln 4 + \ln(3x + 16) \iff \ln x^2 = \ln 4(3x + 16)$$

Eftersom logaritmen är strängt växande, så är den sista ekvationen för $x > 0$ ekvivalent med

$$x^2 = 4(3x + 16) \iff x^2 - 12x - 64 = 0 \iff x = 6 \pm \sqrt{36 + 64} = 6 \pm 10$$

Då den negativa roten är otillåten, har vi bara en lösning: $\mathbf{x = 16}$.

2. Räkna i polär form:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{200} &= \left(1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{200} = 1^{200} e^{i\frac{200\pi}{3}} = e^{i(66\pi + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \\ &= -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

3. (a)

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \iff 3x = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \iff x = \pm \frac{\pi}{9} + n \frac{2\pi}{3}$$

- (b)

$$\sin 2x = \sqrt{2} \sin x \iff 2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \sin x$$

Två fall: $\sin x = 0$ och $\sin x \neq 0$. I det förra fallet är lösningarna alla sinusfunktionens nollställen $x = n\pi$. I det senare fallet kan vi förkorta med $\sin x$ och få ekvationen

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \pm \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

Lösningar:

$$\text{(a)} \pm \frac{\pi}{9} + n \frac{2\pi}{3} = \pm 20^\circ + n \cdot 120^\circ$$

$$\text{(b)} \mathbf{x = n\pi = n \cdot 180^\circ, \quad x = \pm \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi = \pm 45^\circ + n \cdot 360^\circ}$$

4. Kurvan skär x-axeln då $x^3 - 3x^2 = 0 \iff x^2(x - 3) = 0$, dvs förutom i origo har vi skärningspunkten $x = 3$, så vår punkt är $P = (3, 0)$. Riktningskoefficienten för tangenten i denna punkt är $k_T = f'(3)$ och för normalen $k_N = -\frac{1}{f'(3)}$. Med $f'(x) = 3x^2 - 6x$ blir $k_T = 9$ och $k_N = -\frac{1}{9}$. Vi kan nu teckna ekvationerna för dessa linjer:

$$\text{Tangenten: } y - 0 = 9(x - 3) \iff y = 9x - 27$$

$$\text{Normalen: } y - 0 = -\frac{1}{9}(x - 3) \iff y = -\frac{x}{9} + \frac{1}{3}$$

$$\text{Tangent: } \mathbf{y = 9x - 27, \quad \text{normal: } y = -\frac{x}{9} + \frac{1}{3}}$$

5. För $x < 0$ är $|x| = -x$, så vi kan skriva

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x} - |x| &= \sqrt{x^2 + 2x} + x = \{ \text{konjugatförläng!} \} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} + x)(\sqrt{x^2 + 2x} - x)}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} = \frac{(x^2 + 2x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} \\ \{ \text{bryt ut } x^2 \text{ ur kvadratroten} \} &= \frac{2x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x} = \frac{2x}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x} = \frac{2x}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x} \\ &= \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1} \rightarrow \frac{2}{-1 - 1} = -1 \text{ då } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Gränsvärdet är -1.

6. Uppgiften är att definiera $f(1)$ så att f blir kontinuerlig i $x = 1$, vilket innebär att $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = A$ (funktionen är kontinuerlig för alla andra x oavsett valet av a).

Först tar vi reda på vad a ska vara. Eftersom nämnaren $x - 1$ blir noll då $x = 1$, så måste detta gälla även täljaren $x^2 + 3x + a$, annars blir det inget gränsvärde då $x \rightarrow 1$. Detta ger $a = -4$.

Vi faktoreruppdelar täljaren, som har nollställena $x_1 = 1$ och $x_2 = -4$ (lös andragradaren $x^2 + 3x - 4 = 0$ eller utnyttja sambandet mellan rötterna och den konstanta koefficienten: $x_1 x_2 = -4$, $x_1 = 1$ är ju känd). Nu kan vi beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4) = 5 = f(1) = A$$

Vi ska alltså välja $a = -4$, $A = 5$.

7. Vi kallar den kvadratiske basytans sida a . Höjden (den femte biten av järnstången) blir då $h = 12 - 4a$. Volymen kan nu tecknas och uttryckas i a enbart:

$$V(a) = \frac{a^2 h}{3} = \frac{a^2 (12 - 4a)}{3} = \frac{4(3a^2 - a^3)}{3}, \quad 0 \leq a \leq 3$$

Vi tillåter här $a = 0$ och $a = 3$, vilket förstås ger volymen noll. Vi deriverar och söker derivatans nollställan:

$$\begin{aligned} V'(a) &= \frac{4(6a - 3a^2)}{3} = \frac{12a(2 - a)}{3} \\ V'(a) &= 0 \iff a = 0 \text{ eller } a = 2. \end{aligned}$$

Vi gör en teckentabell, i vilken derivatans tecken tolkas som växande/avtagande hos funktionen $V(a)$:

a	0	<	2	<	3
$V'(a)$	0	+	0	-	
$V(a)$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{3}$	$\searrow$	0

Tabellen visar att volymen har lokalt och absolut maximum då $a = 2$ (m) samt att den maximala volymen är $V(2) = \frac{16}{3}$ (m³). Vidare blir $h = 12 - 4a = 4$ (m).

Järnstången skall alltså delas i fyra 2-metersbitar och en 4-metersbit.

Del C, uppgift 2: se nästa sida!

C2

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h+2} - \frac{1}{x+2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+2-(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h+2)(x+2)} = -\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{x} + \mathbf{2})^2} \end{aligned}$$

Uppgift C1 och C3, se läroboken!