Tenta LMA164B 2012-12-19: lösningsförslag.

1. (a)

$$\lg(10^x - 18) = x - 1$$
$$10^x - 18 = 10^{x-1}$$
$$10^x - 10^{x-1} = 18$$
$$10^x - 10^x 10^{-1} = 18$$
$$0,9 \cdot 10^x = 18$$
$$10^x = 20$$
$$\mathbf{x} = \lg \mathbf{20}$$

(b)

$$2^{x+3} + 6 \cdot 2^{x-1} = 33$$
$$2^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2 \cdot 2^{x-1} = 33$$
$$8 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x = 33$$
$$11 \cdot 2^x = 33$$
$$2^x = 3$$
$$\ln 2^x = \ln 3$$
$$\mathbf{x} = \frac{\ln \mathbf{3}}{\ln \mathbf{2}} \approx \mathbf{1,58}$$

2. (a)

$$\tan 4x = \sqrt{3}$$
$$4x = \arctan\sqrt{3} + n \cdot \pi = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$
$$\mathbf{x} = \frac{\pi}{\mathbf{12}} + \mathbf{n} \cdot \frac{\pi}{\mathbf{4}} = \mathbf{15}^\circ + \mathbf{n} \cdot \mathbf{45}^\circ \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{Z})$$

(b)

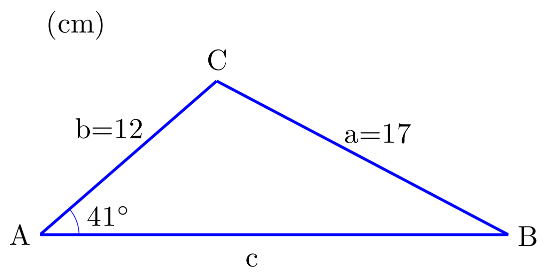
$$2\sin x + \tan x = 0$$
$$2\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$
$$\sin x \left(2 + \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$
$$\sin x = 0 \quad \text{eller} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \pi \quad \text{eller} \quad \mathbf{x} = \pm\frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{3}} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{2}\pi \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{Z})$$

3. Vi kan använda sinussatsen för att beräkna vinkeln B (se figuren!):

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{12 \sin 41^\circ}{17}$$

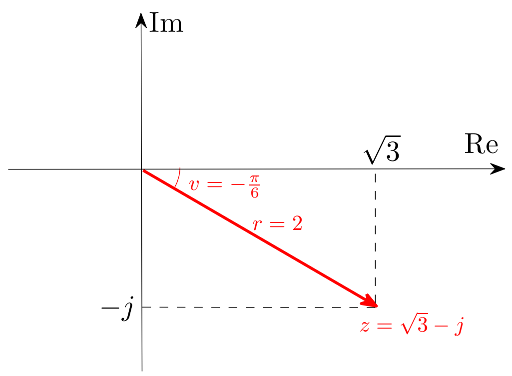
Räknaren ger oss $B = \arcsin \frac{12 \sin 41^\circ}{17} \approx 27,6^\circ$, men vi måste också beakta supplementvinkeln $\approx 180^\circ - 27,6^\circ = 152,4^\circ$, som är den alternativa lösning som kan vara en triangelvinkel. Emellertid får denna vinkel "inte plats" med tanke på att triangelns vinkelsumma ska vara 180°. Vi går alltså vidare med $B \approx 27,6^\circ$ och får $C = 180 - A - B \approx 111,4^\circ$. Slutligen ger sinussatsen sista sidan:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{17 \sin C}{\sin 41^\circ} \approx 24,1$$



Svar: Sidan $\mathbf{c} \approx \mathbf{24cm}$, vinklarna $\mathbf{B} \approx \mathbf{28}^\circ$, $\mathbf{C} \approx \mathbf{111}^\circ$.

4. Skriv talet $\sqrt{3} - i$ i polär form, se figuren!



Vi får $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ och $v = -\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$, alltså

$$\sqrt{3} - i = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Nu kan vi beräkna potensen:

$$(\sqrt{3} - i)^{20} = (2e^{-i\frac{\pi}{6}})^{20} = 2^{20} e^{-i\frac{10\pi}{3}} = 2^{20} e^{i(-4\pi + \frac{2\pi}{3})} = 2^{20} e^{i\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= 2^{20}(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}) = 2^{20}(-\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}) = 2^{20}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \mathbf{-2^{19} + i2^{19}\sqrt{3}}$$

5. (a) Polynomen i täljare och nämnare har nollstället $x = 1$, så vi kan faktoruppdela dem enligt faktorsatsen med faktorn $x - 1$. Vi ser då (eventuellt efter att ha löst ut nollställena till båda polynomen):

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

Härav följer att gränsvärdet då $x \to 1$ är $\mathbf{\frac{4}{3}}$.

(b) Här prövar vi med konjugatförlängning:

$$\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} = \frac{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})} = \frac{x^2-(3x-2)}{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})} = \frac{x^2-3x+2}{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})}$$

Eftersom polynomen i täljaren och nämnaren båda blir noll för $x = 2$, så kan vi faktoruppdela med faktorn $x - 2$ (jfr föregående uppgift):

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})} = \frac{x-1}{(x+2)(x+\sqrt{3x-2})} \to \frac{1}{4(2+\sqrt{4})} = \mathbf{\frac{1}{16}} \text{ då } x \to 2.$$

6. Vi deriverar $y = x(x^2 + 3x + 2) + 5 = x^3 + 3x^2 + 2x + 5$ och får $y' = 3x^2 + 6x + 2$. Riktningskoefficienten för tangenten till kurvan där $x = 0$ är $y'(0) = 2$. Eftersom $y(0) = 5$, ska vi alltså teckna en ekvation för den räta linjen genom $(0, 5)$ med riktningskoefficient 2:

$$y - 5 = 2(x - 0)$$

$$\mathbf{y = 2x + 5}$$

7. I alla punkter utom i skarven $x = 2$ har vi den kontinuitet som gäller för polynom ($f(x) = 2x - 2$ för $x < 2$ och $f(x) = 2x + a$ för $x \geq 2$). Kontinuitet i $x = 2$ innebär att $\lim_{x\to 2} = f(2)$. Här är $f(2) = 4 + a$, vilket också är högergränsvärdet. För kontinuitet krävs då bara att vänstergränsvärdet är detsamma, dvs att $2 = 4 + a$, så vi har $\mathbf{a = -2}$. Funktionen är nu $f(x) = 2x - 2$ för alla x.

8. (a) Eftersom funktionen är definierad och deriverbar för alla reella x är derivatans nollställen de enda möjliga lokala extrempunkterna. Vi undersöker derivatan:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x^2 - 3x - 4)$$

Andragradspolynomet har nollställena $x = -1$ och $x = 4$:

$$f'(x) = 4x(x+1)(x-4)$$

Samtliga nollställen: $x = -1$, $x = 0$ och $x = 4$. Vi undersöker derivatans tecken och drar slutsatser om funktionens avtagande och växande i olika intervall. Detta visas lämpligen i en tabell:

x	$<$	-1	$<$	0	$<$	4	$<$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	3	↘	-125	↗

Vi drar härav slutsatsen att $f(x)$ har ett **lokalt maximum i $\mathbf{x = 0}$** och **lokala minima i $\mathbf{x = -1}$** och $\mathbf{x = 4}$.

(b) Med stöd av tabellen vet vi nu att funktionen växer från $f(-1) = 0$ till $f(0) = 3$, därefter avtar till $f(1) = -8$. Därav kan vi konstatera att i intervallet $[-1, 1]$ är **största värdet är 3 och minsta värdet är -8**.

9. Det ser kanske märkligt ut att uttrycken till vänster och höger skulle kunna vara lika, men vi utvecklar dem var för sig för att kunna avgöra detta.

$$VL = \left(1 - \frac{2\tan x}{\sin 2x}\right)^2 = \left(1 - \frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{2\sin x \cos x}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = \left(\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^2 = \left(-\tan^2 x\right)^2 = \tan^4 x$$

$$HL = \left(1 - \frac{2\tan x}{\tan 2x}\right)^2 = \left(1 - \frac{2\tan x}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}\right)^2 = \left(1 - (1 - \tan^2 x)\right)^2 = (\tan^2 x)^2 = \tan^4 x$$

Så faktiskt, **de är lika!**