

## Tenta MVE425 II: lösningsförslag.

1. (a)  $\lg(14 - x)$  är definierat då  $14 - x > 0$ ,  $\lg(x - 3)$  är definierat då  $x - 3 > 0$ . Detta ger att  $f(x)$  är definierad då  $3 < x < 14$ , dvs  $\mathcal{D}_f = (3, 14)$ .

Svar:  $\mathcal{D}_f = (3, 14)$

- (b) Skriv om med log-lagar:

$$\lg(14 - x) - \lg(x - 3) = 1$$

$$\lg \frac{14 - x}{x - 3} = \lg 10$$

$$\frac{14 - x}{x - 3} = 10$$

$$14 - x = 10(x - 3)$$

$$11x = 44$$

$$x = 4$$

Svar:  $x = 4$

2. (a)  $y(t) = 20000$  ger:

$$20000 = 2000 \cdot 10^{0,2t}$$

$$10^{0,2t} = 10^1$$

$$0,2t = 1$$

$$t = 5$$

Svar: **Efter 5 timmar.**

- (b)  $y(t) = 40000$  ger:

$$40000 = 2000 \cdot 10^{0,2t}$$

$$10^{0,2t} = 20$$

$$0,2t = \lg 20$$

$$t = 5 \lg 20$$

Svar: **Efter  $5 \lg 20$  ( $\approx 6,5$ ) timmar.**

3. (a)

$$\sin 5x = \sin(60^\circ - x)$$

$$5x = 60^\circ - x + n \cdot 360^\circ \text{ eller } 5x = 180^\circ - (60^\circ - x) + n \cdot 360^\circ, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$6x = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ eller } 4x = 120^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x = 10^\circ + n \cdot 60^\circ \text{ eller } x = 30^\circ + n \cdot 90^\circ$$

$$\text{Svar: } \mathbf{x = 10^\circ + n \cdot 60^\circ \text{ eller } \mathbf{x = 30^\circ + n \cdot 90^\circ, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

(b)

$$3\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = c\sin(x + \phi) = (c\sin\phi)\cos x + (c\cos\phi)\sin x$$

Detta ger

$$\begin{cases} c\sin\phi &= 3\sqrt{3} \\ c\cos\phi &= 3 \end{cases}$$

varmed  $c = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$  och  $\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \sqrt{3}$  ger  $\phi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ , eftersom  $\phi$  ligger i första kvadranten (sinus och cosinus är positiva).

$$\text{Svar: } \mathbf{3\sin x + 3\sqrt{3}\cos x = 6\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 6\sin(x + 60^\circ)}$$

4. Vi sätter  $z = re^{iv}$  och skriver ekvationen i polär form:

$$z^4 = -16 \iff (re^{iv})^4 = 16e^{i(\pi+n\cdot 2\pi)} \iff r^4 e^{i4v} = 16e^{i(\pi+n\cdot 2\pi)}$$

$$\iff \begin{cases} r^4 &= 16 \\ 4v &= \pi + n \cdot 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r &= 2 \\ v &= \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Vi har därmed lösningarna i exponentiell polär form:

$$z = 2e^{i(\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2})}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Insättning av vardera  $n$ -värdet ger

$$z = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z = 2(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z = 2(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z = 2(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Kunskapen om att de fyra rötterna bildar en kvadrat på cirkeln  $|z| = 2$  kan också användas för att snabbt få de tre senare rötterna ur den första.

$$\text{Svar: } \mathbf{z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.}$$

5. (a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-x} &= \text{konjugatförlängning} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-x)(\sqrt{x+3}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)-4}{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Svar:  $\frac{1}{4}$

(b) Vi bryter ut  $x^2$  ur rotuttrycket och använder att  $\sqrt{x^2} = |x| = -x$  då  $x < 0$ :

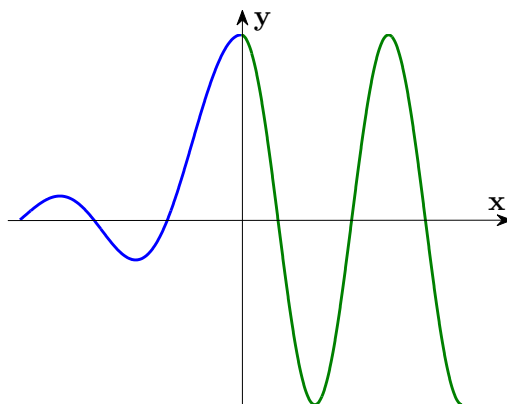
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 4\end{aligned}$$

Svar: 4

6. Att  $f$  är kontinuerlig i  $x = 0$  innebär att  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , vilket alltså ska kollas. Eftersom  $f(0) = \cos 0 = 1$  och  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x$  (höger- och vänstergränsvärden båda  $= f(0)$ ), så är tydligen  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

Svar: **Ja, funktionen är kontinuerlig i noll.**

Så här ser grafen ut. Kontinuiteten visar sig genom att kurvan "hänger ihop" i  $x = 0$ .



7. Vi genomför kvadratkomplettering och får

$$z^2 + (2-4i)z + 2-16i = 0 \iff (z+(1-2i))^2 - (1-2i)^2 + 2-16i = 0 \iff (z+1-2i)^2 = -5+12i$$

Om vi sätter  $z+1-2i = u+iv$ , så är  $(z+1-2i)^2 = u^2 - v^2 + i2uv$ , vilket vi jämför med högerledet och får

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ 2uv = 12 \end{cases}$$

Ett knep för att underlätta lösningen av systemet är att också jämföra absolutbeloppen:  $|(z+1-2i)^2| = |(u+iv)^2| = |u+iv|^2 = u^2 + v^2$ , som ska vara lika med  $|-5+12i| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ . Vi får systemet

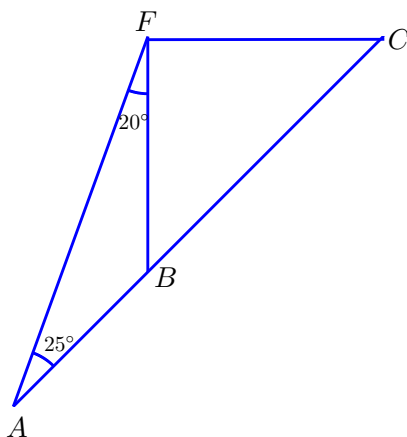
$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 13 \\ u^2 - v^2 = -5 \\ 2uv = 12 \end{cases}$$

genom ledvis addition och subtraktion av de två första ekvationerna får vi  $u^2 = 4$  respektive  $v^2 = 9$ . Den tredje ekvationen visar att vi ska välja  $u$  och  $v$  med samma tecken. Då har vi dels  $u+iv = 2+3i$ , dels  $u+iv = -2-3i$ . Eftersom  $z+1-2i = u+iv$  har vi slutligen de två rötterna

$$\begin{cases} z = -1+2i+2+3i = 1+5i \\ z = -1+2i-2-3i = -3-i \end{cases}$$

Svar:  $\begin{cases} z_1 = 1+5i \\ z_2 = -3-i \end{cases}$

8. Med beteckningar enligt figuren börjar vi i triangeln ABF, där A är startpunkten kl 8.00, B är läget kl 9.00, F är fyren. Vinkeln vid F är  $20^\circ$  (kolla själv!).



Vi vill veta när båten nått punkten  $C$ , så att fyren  $F$  syns rakt i väster. Sinussatsen ger

$$\frac{BF}{\sin 25^\circ} = \frac{AB}{\sin 20^\circ} \Rightarrow BF = \frac{AB \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ}$$

Eftersom triangeln BCF är en halv kvadrat, är diagonalen

$$BC = BF\sqrt{2} = \frac{AB\sqrt{2} \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ}$$

Eftersom sträckan  $AB$  tog en timma får vi tiden till  $\frac{\sqrt{2} \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 1,747$  h  $\approx 1$  h 45 min efter kl 9.00. **Fyren är rakt i väster klockan 10.45.**