Tenta MVE425 I: lösningsförslag.

1. (a)

$$\lg(10^x - 18) = x - 1$$
$$10^x - 18 = 10^{x-1}$$
$$10^x - 10^{x-1} = 18$$
$$10^x - 10^x 10^{-1} = 18$$
$$0,9 \cdot 10^x = 18$$
$$10^x = 20$$
$$\mathbf{x} = \lg \mathbf{20}$$

(b)

$$2^{x+3} + 6 \cdot 2^{x-1} = 33$$
$$2^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2 \cdot 2^{x-1} = 33$$
$$8 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x = 33$$
$$11 \cdot 2^x = 33$$
$$2^x = 3$$
$$\ln 2^x = \ln 3$$
$$\mathbf{x} = \frac{\ln \mathbf{3}}{\ln \mathbf{2}} \approx \mathbf{1,58}$$

2. (a)

$$\tan 4x = \sqrt{3}$$
$$4x = \arctan\sqrt{3} + n \cdot \pi = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$
$$\mathbf{x} = \frac{\pi}{\mathbf{12}} + \mathbf{n} \cdot \frac{\pi}{\mathbf{4}} = \mathbf{15}^\circ + \mathbf{n} \cdot \mathbf{45}^\circ \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{Z})$$

(b)

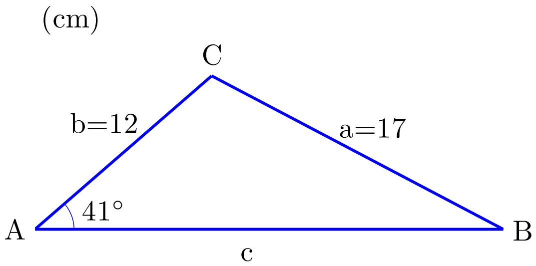
$$2\sin x + \tan x = 0$$
$$2\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$
$$\sin x \left(2 + \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$
$$\sin x = 0 \quad \text{eller} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \pi \quad \text{eller} \quad \mathbf{x} = \pm\frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{3}} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{2}\pi \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{Z})$$

3. Vi kan använda sinussatsen för att beräkna vinkeln B (se figuren!):

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{12 \sin 41^\circ}{17}$$

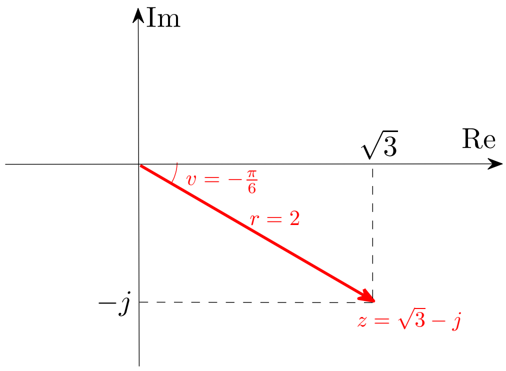
Räknaren ger oss $B = \arcsin \frac{12 \sin 41^\circ}{17} \approx 27,6^\circ$, men vi måste också beakta supplementvinkeln $\approx 180^\circ - 27,6^\circ = 152,4^\circ$, som är den alternativa lösning som kan vara en triangelvinkel. Emellertid får denna vinkel ”inte plats” med tanke på att triangelns vinkelsumma ska vara 180°. Vi går alltså vidare med $B \approx 27,6^\circ$ och får $C = 180 - A - B \approx 111,4^\circ$. Slutligen ger sinussatsen sista sidan:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{17 \sin C}{\sin 41^\circ} \approx 24,1$$



Svar: Sidan **c** $\approx$ **24cm**, vinklarna **B** $\approx$ **28°**, **C** $\approx$ **111°**.

4. Skriv talet $\sqrt{3} - j$ i polär form, se figuren!



Vi får $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ och $v = -\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$, alltså

$$\sqrt{3} - j = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + j \sin(-\frac{\pi}{6})) = 2e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

Nu kan vi beräkna potensen:

$$(\sqrt{3} - j)^{20} = (2e^{-j\frac{\pi}{6}})^{20} = 2^{20} e^{-j\frac{10\pi}{3}} = 2^{20} e^{j(-4\pi + \frac{2\pi}{3})} = 2^{20} e^{j\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= 2^{20}(\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3}) = 2^{20}(-\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}) = 2^{20}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \mathbf{-2^{19} + 2^{19}\sqrt{3}}$$

5. (a) Polynomen i täljare och nämnare har nollstället $x = 1$, så vi kan faktoruppdela dem enligt faktorsatsen med faktorn $x-1$. Vi ser då (eventuellt efter att ha löst ut nollställena till båda polynomen):

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

Härav följer att gränsvärdet då $x \to 1$ är $\mathbf{\frac{4}{3}}$.

(b) $\dfrac{\tan^2 x}{x \sin 2x} = \dfrac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{2x \sin x \cos x} = \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1}{2\cos^3 x} \to 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

6. Med reella koefficienter vet vi att om $2+i$ är en rot, så är också dess konjugat $2-i$ en rot. Enligt faktorsatsen är vårt tredjegradspolynom då delbart med både $z-2-i$ och $z-2+i$, alltså även med deras produkt $(z-2-i)(z-2+i) = z^2-4z+5$. Vi har då $2z^3+az^2+bz+15 = (z^2-4z+5)(2z+3)$ (förstagradspolynomets koefficienter ser man vid direkt jämförelse med vänsterledet). Utvecklar man högerledet, så ser man att $a=-5$ och $b=-2$. Återstående nollställe är roten till $2z+3=0$, dvs $z=-\frac{3}{2}$.
Rötter: $\mathbf{z = 2 \pm i}$, $\mathbf{z = -\frac{3}{2}}$, koefficienter: $\mathbf{a = -5}$, $\mathbf{b = -2}$.

7. I alla punkter utom i skarven $x=2$ har vi den kontinuitet som gäller för polynom ($f(x) = 2x-2$ för $x<2$ och $f(x) = 2x+a$ för $x \geq 2$). Kontinuitet i $x=2$ innebär att $\lim\limits_{x\to 2} = f(2)$. Här är $f(2) = 4+a$, vilket också är högergränsvärdet. För kontinuitet krävs då bara att vänstergränsvärdet är detsamma, dvs att $2 = 4+a$, så vi har $\mathbf{a = -2}$. Funktionen är nu $f(x) = 2x-2$ för alla x.

8. Det ser kanske märkligt ut att uttrycken till vänster och höger skulle kunna vara lika, men vi utvecklar dem var för sig för att kunna avgöra detta.

$$VL = \left(1 - \frac{2\tan x}{\sin 2x}\right)^2 = \left(1 - \frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{2\sin x \cos x}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = \left(\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^2 = \left(-\tan^2 x\right)^2 = \tan^4 x$$

$$HL = \left(1 - \frac{2\tan x}{\tan 2x}\right)^2 = \left(1 - \frac{2\tan x}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}\right)^2 = \left(1 - (1-\tan^2 x)\right)^2 = (\tan^2 x)^2 = \tan^4 x$$

Så faktiskt, **de är lika!**