Lösningar till gränsvärdesuppgifterna med trigonometriska funktioner

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{5}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{3}{5}=1\cdot\frac{3}{5}$$

Det sista variabelbytet $t=3x$ är kanske inte nödvändigt att genomföra, och det görs inte heller i en liknande situation i uppgift 6 nedan.

2. För $x>0$ gäller
$$\frac{-1}{5x}\leq\frac{\sin 3x}{5x}\leq\frac{1}{5x}$$
Eftersom de båda ytterleden har gränsvärdet noll då $x\to\infty$, så gäller enligt

instängningsregeln att även $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 3x}{5x}=0$

3. Dela upp i två bråk:
$$\lim_{x\to 0}\frac{3\tan x+2x\cos x}{4x}=\lim_{x\to 0}(\frac{3}{4}\frac{\tan x}{x}+\frac{\cos x}{2})=\lim_{x\to 0}(\frac{3}{4\cos x}\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{2})=\frac{3}{4}\cdot 1+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

4. Använd konjugatförlängning:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^2\frac{x}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{0}{2}=0$$

5. Nästan en kopia på föregående:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^2\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

6.
$$\frac{3x^2}{\tan^2(2x)}=\frac{3x^2\cos^2(2x)}{\sin^2(2x)}=\frac{3x^2\cos^2(2x)}{\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2(2x)^2}=\frac{3}{4}\frac{\cos^2(2x)}{\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2}\to\frac{3}{4}\cdot\frac{1^2}{1^2}=\frac{3}{4}\text{ då }x\to 0.$$