

MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

Examinator / telefonvakt: Lukáš Malý, tel. 031 - 772 53 42

Hjälpmedel: Formelblad utdelat med tesen (tryckt på baksidan). Inga miniräknare är tillåtna.

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 32 p; för betyg 5 krävs 42 p (utav 50 p).

Lösningsslag publiceras på kurshemsidan idag kl. 14:30.

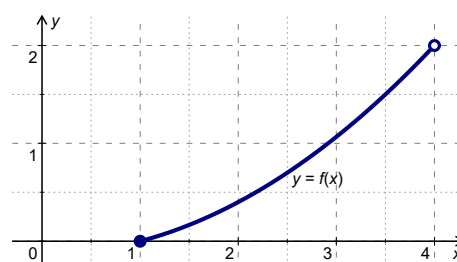
Granskningstillfälle meddelas via kurshemsidan och mail/meddelande från PING PONG.

OBS: Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motivering kommer att orsaka poängavdrag.

1. Grafen till funktionen $y = f(x)$ visas i figuren till höger. Genom att läsa av grafen,

(a) bestäm definitionsmängden och värdemängden av funktionen f ; (1p)

(b) avgör om f är omvändbar. Om så är fallet, skissa en graf av inversfunktionen f^{-1} . Men om så inte är fallet, bestäm en lämplig restriktion av f så att den blir omvändbar. (2p)



2. Lös följande ekvationer: (2p + 2p + 3p)

(a) $e^{5x} = 7e^{2x+1}$; (b) $\ln(\lg(2x)) = 0$; (c) $2 \ln(x+1) = \ln 2 + \ln(x+5)$.

3. Triangeln ABC har sidlängder $a = 7$ cm, $b = 5$ cm och $c = 3$ cm.

(a) Beräkna vinkeln vid hörnet A . Svara dels i grader, dels i radianer. (3p)

(b) Beräkna triangelns area. (2p)

4. (a) Formulera areasatsen. (En variant räcker. Bevis krävs ej.) (2p)

(b) Formulera och bevisa sinussatsen. (4p)

5. Bestäm talet $a \in \mathbb{R}$ och fasvinkeln $\phi \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ så att (4p)

$$a \cos v + 2 \sin v = 4 \sin(v + \phi)$$

6. Lös följande komplexa ekvationer: (2p + 4p + 5p)

(a) $(2 - i)\bar{z} = 7 - i$, (b) $z^2 + (2 - 2i)z + 5 + 10i = 0$, (c) $z^4 = 8 \cdot (-1 - i\sqrt{3})$.

Svar ska anges i rektangulär form (d.v.s. som $x + iy$, där $x, y \in \mathbb{R}$.)

7. Beräkna följande gränsvärden: (3p + 2p + 3p)

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+3)^2 - (x+1)^2}{\sqrt{6+x} - \sqrt{2-x}}$, (b) $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin(3v)}{\sin(5v)}$, (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5x + 2}}{\sqrt[3]{8 + x^3}}$

Var god vänd!

8. För alla $t \in \mathbb{R}$ gäller att $\frac{3t^2 - t^4}{6} \leq \ln(2 - \cos t) \leq \frac{t^2}{2}$. Använd gärna denna olikhet till att bestämma (2p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos(2x))}{x^2}.$$

9. Bestäm det reella talet $a \in \mathbb{R}$ så att funktionen (4p)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{då } x < 2, \\ a^2 & \text{då } x = 2, \\ x - a & \text{då } x > 2 \end{cases}$$

blir vänsterkontinuerlig men inte högerkontinuerlig i punkten $x = 2$.

Lycka till!

Formler

Additions- och subtraktionsformlerna för de trigonometriska funktionerna

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \qquad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \qquad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \qquad \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \qquad \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

Formler för dubbla vinkeln

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \qquad \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \qquad \cot(2\alpha) = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$