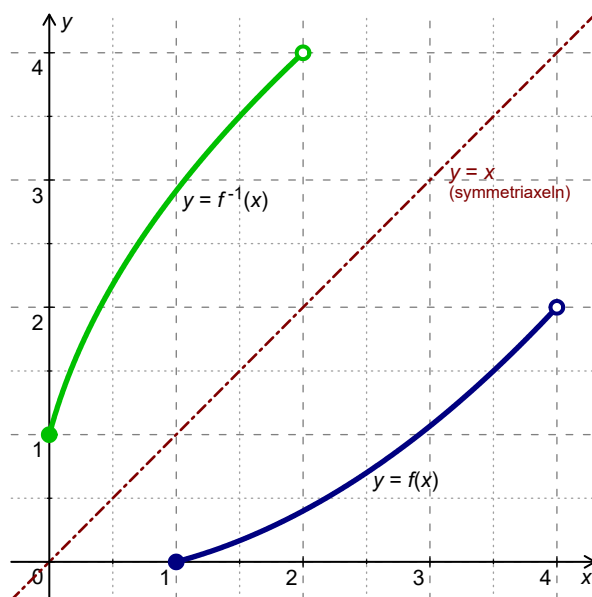


MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

Uppgift 1. (a) $D_f = [1, 4)$ (= mängden av x -värdena i funktionens graf) och $V_f = [0, 2)$ (= mängden av y -värdena i funktionens graf).

(b) Grafen klarar dubbla linjaltestet och så är f omvändbar. Grafen till f^{-1} fås genom att spegla grafen till f i linjen $y = x$:



Uppgift 2. (a) Dividera båda leden med e^{2x} och därefter logaritmera ekvationen:

$$\begin{aligned} e^{5x} &= 7e^{2x+1} &\Leftrightarrow & e^{5x-2x} = 7e &\Leftrightarrow & \ln(e^{3x}) = \ln(7e) \\ & &\Leftrightarrow & 3x = \ln(7e) &\Leftrightarrow & x = \frac{\ln(7e)}{3} = \frac{1 + \ln 7}{3}. \end{aligned}$$

(b) Tillämpa den inversa funktionen till $\ln$ (d.v.s. e^z) och därefter den inversa funktionen till $\lg$ (d.v.s. 10^z):

$$\begin{aligned} \ln(\lg(2x)) &= 0 &\Leftrightarrow & e^{\ln(\lg(2x))} = e^0 &\Leftrightarrow & \lg(2x) = 1 \\ & &\Leftrightarrow & 10^{\lg(2x)} = 10^1 &\Leftrightarrow & 2x = 10 &\Leftrightarrow & x = 5. \end{aligned}$$

Kontroll: $VL = \ln(\lg(2 \cdot 5)) = \ln(\lg(10)) = \ln(1) = 0 = HL$.

(c) Förenkla uttrycken m.h.a. logaritmlagarna och sedan utnyttja omvändbarheten av $\ln$:

$$\begin{aligned} 2 \ln(x+1) &= \ln 2 + \ln(x+5) &\Leftrightarrow & \ln((x+1)^2) = \ln(2(x+5)) \\ & &\Leftrightarrow & \ln(x^2 + 2x + 1) = \ln(2x + 10) \\ & &\Leftrightarrow & x^2 + 2x + 1 = 2x + 10 &\Leftrightarrow & x^2 = 9 &\Leftrightarrow & x = \pm 3. \end{aligned}$$

Kontroll:

$$x = 3: \quad VL = 2 \ln(3+1) = 2 \ln 4 = \ln(4^2) = \ln 16.$$

$$HL = \ln 2 + \ln(3+5) = \ln 2 + \ln 8 = \ln(2 \cdot 8) = \ln 16. \quad VL = HL.$$

$$x = -3: \quad VL = 2 \ln(-3+1) = 2 \ln(-2) = \text{odefinierat! Således är } x = -3 \text{ en falsk rot!}$$

Svar: Ekvationen har endast en lösning, nämligen $x = 3$.

Uppgift 3. (a) Vinkeln bestäms m.h.a. cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$:

$$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{15}{-30} = \cos \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \cos \alpha = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi.$$

(b) Areasatsen ger

$$A = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{5 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

Uppgift 4. (a) Arean av en triangel är $A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, där a och b är längderna av två sidor i triangeln och γ är mellanliggande vinkeln.

(b) Sinussatsen i triangeln ABC med sidlängderna a, b samt c och vinklarna α, β samt γ lyder:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Bevis: Uttryck triangelns area m.h.a. areasatsen på tre olika sätt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} \quad \Bigg/ \cdot \frac{2}{abc} \\ &\Leftrightarrow \frac{\cancel{a}\cancel{b} \sin \gamma}{\cancel{a}\cancel{b}c} = \frac{\cancel{b}\cancel{c} \sin \alpha}{\cancel{b}\cancel{c}a} = \frac{\cancel{a}\cancel{c} \sin \beta}{\cancel{a}\cancel{c}b} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}. \end{aligned} \quad \text{V.S.B.}$$

Uppgift 5. De sökta talen a och ϕ kan beräknas genom att följa beviset av amplitud/fasvinkel-omskrivningen: Börja med att skriva om sinusfunktionen på HL m.h.a. additionsformeln. Därefter identifierar man koefficienterna vid $\sin v$ och vid $\cos v$.

$$\begin{aligned} a \cos v + 2 \sin v &= 4 \sin(v + \phi) \quad \Leftrightarrow \quad a \cos v + 2 \sin v = 4(\sin v \cos \phi + \cos v \sin \phi) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 4 \sin \phi & (\text{koefficienterna vid } \cos v) \\ 2 = 4 \cos \phi & (\text{koefficienterna vid } \sin v) \end{cases} \end{aligned}$$

Således ska fasvinkeln ϕ uppfylla $\cos \phi = \frac{2}{4}$. Enligt uppgiften ska ϕ ligga i fjärde kvadranten, och så är $\phi = 300^\circ = \frac{5}{3}\pi$. (Observera att $\phi = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$ är ett felaktigt svar eftersom det inte ligger i det givna intervallet $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$.)

När man bestämt att $\phi = \frac{5}{3}\pi$, så går det att beräkna $a = 4 \sin \phi = 4 \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$.

Uppgift 6. (a) Dividera ekvationen med $(2 - i)$ och förläng bråket med nämnarens konjugat:

$$(2 - i)\bar{z} = 7 - i \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} = \frac{7 - i}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{14 + 7i - 2i - i^2}{2^2 - i^2} = \frac{15 + 5i}{5} = 3 + i \quad \Leftrightarrow \quad z = 3 - i.$$

(b) Man börjar med att kvadratkomplettera VL.

$$\begin{aligned} z^2 + (2 - 2i)z + 5 + 10i &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{z^2 + 2(1 - i)z + (1 - i)^2}_{=(z + (1 - i))^2} - (1 - i)^2 + 5 + 10i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (z + 1 - i)^2 = \underbrace{(1 - i)^2}_{=-2i} - 5 - 10i \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(z + 1 - i)^2}_{=:w} = -5 - 12i. \end{aligned}$$

Nu behöver man lösa ekvationen $w^2 = -5 - 12i$. Ansätt $w = u + iv$, där u och v är reella tal. Då blir

$$(u + iv)^2 = -5 - 12i \Leftrightarrow u^2 + 2iuv - v^2 = -5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 & (\text{Re}) \\ 2uv = -12 & (\text{Im}) \end{cases}$$

Man kan lägga till en tredje ekvation genom att beräkna absolutbeloppen av båda leden:

$$u^2 + v^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \quad (\text{Abs})$$

(Re) + (Abs) ger $2u^2 = 13 - 5 = 8$ och så $u^2 = 4$, d.v.s., $u = \pm 2$. Från ekvationen (Im) får man att $v = -6/u = -6/\pm 2 = \mp 3$. Vi har alltså fått två lösningar:

$$\begin{aligned} z_1 + 1 - i = w_1 = 2 - 3i &\Leftrightarrow z_1 = 1 - 2i \quad \text{och} \\ z_2 + 1 - i = w_2 = -2 + 3i &\Leftrightarrow z_2 = -3 + 4i. \end{aligned}$$

Svar: Ekvationen löses av $z_1 = 1 - 2i$ och $z_2 = -3 + 4i$.

(c) Detta är en binomisk ekvation. Börja med att skriva om HL i polär form:

$$|HL| = |8(-1 - \sqrt{3})| = 8 \cdot |-1 - \sqrt{3}| = 8\sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{4} = 8 \cdot 2 = 16.$$

$$\arg(HL) =: \phi \text{ ska uppfylla } \cos \phi = \frac{-8}{16} = \frac{-1}{2} \quad \& \quad \sin \phi = \frac{-8\sqrt{3}}{16} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{4\pi}{3}.$$

När z skrivs i polär form $z = re^{i\theta}$, så blir $VL = r^4 e^{i4\theta}$. Den binomiska ekvationen lyder alltså

$$r^4 e^{i4\theta} = 16e^{i4\pi/3} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 16 & (\text{Abs}) \\ 4\theta = \frac{4\pi}{3} + k2\pi & (\text{Arg}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

Således finns det fyra lösningar:

$$\begin{aligned} k = 0: \quad z_0 &= 2e^{i\pi/3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}, \\ k = 1: \quad z_1 &= 2e^{i5\pi/6} = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i, \\ k = 2: \quad z_2 &= 2e^{i4\pi/3} = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}, \\ k = 3: \quad z_3 &= 2e^{i11\pi/6} = 2\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1}{2}\right) = \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Uppgift 7. (a) Insättning av $x = -2$ ger " $\frac{0}{0}$ ", vilket är ett obestämt uttryck. Bråket förenklas genom att förlänga det med nämnarens konjugat och sedan förkorta:

$$\begin{aligned} \frac{(x+3)^2 - (x+1)^2}{\sqrt{6+x} - \sqrt{2-x}} \cdot \frac{\sqrt{6+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{6+x} + \sqrt{2-x}} &= \frac{(x^2 + 6x + 9) - (x^2 + 2x + 1)}{(6+x) - (2-x)} \cdot \left(\sqrt{6+x} + \sqrt{2-x}\right) \\ &= \frac{4x + 8}{2x + 4} \cdot \left(\sqrt{6+x} + \sqrt{2-x}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{6+x} + \sqrt{2-x}\right) \rightarrow 2 \cdot \left(\sqrt{6+(-2)} + \sqrt{2-(-2)}\right) = 8 \end{aligned}$$

då $x \rightarrow -2$.

(b) Insättning av $v = 0$ ger " $\frac{0}{0}$ ", vilket är ett obestämt uttryck. Man kan använda sig av standardgränsvärdet $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$. Täljaren förlängs med $3v$ och nämnaren med $5v$:

$$\frac{\sin(3v) \cdot \frac{3v}{3v}}{\sin(5v) \cdot \frac{5v}{5v}} = \frac{\frac{\sin 3v}{3v} \cdot 3\cancel{v}}{\frac{\sin 5v}{5v} \cdot 5\cancel{v}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{\sin 3v}{3v}}{\frac{\sin 5v}{5v}} \rightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{5} \quad \text{då } v \rightarrow 0.$$

(c) Gränsvärdet är av typen " $\frac{\infty}{-\infty}$ ", vilket är ett obestämt uttryck. Man kan bryta ut dominerande potenser av x för att undersöka gränsvärdet. Lägg märke till att x är negativt och så är $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, men $\sqrt[3]{x^3} = x$. Därför är $\sqrt{x^2} / \sqrt[3]{x^3} = |x|/x = -1$

$$\frac{\sqrt{9x^2 - 5x + 2}}{\sqrt[3]{8 + x^3}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} \cdot \frac{\sqrt{9 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{8}{x^3} + 1}} = (-1) \cdot \frac{\sqrt{9 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{8}{x^3} + 1}} \rightarrow (-1) \cdot \frac{\sqrt{9 - 0 + 0}}{\sqrt[3]{0 + 1}} = -3$$

då $x \rightarrow -\infty$.

Uppgift 8. Sätter man $t = 2x$ i den givna dubbelolikheten, så får man att

$$\frac{12x^2 - 16x^4}{6} \leq \ln(2 - \cos(2x)) \leq \frac{4x^2}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - \frac{8x^4}{3} \leq \ln(2 - \cos(2x)) \leq 2x^2.$$

När man dividerat alla leden med x^2 (som är positivt då $x \neq 0$), så fås att

$$\frac{2x^2}{x^2} - \frac{8x^4}{3x^2} \leq \frac{\ln(2 - \cos(2x))}{x^2} \leq \frac{2x^2}{x^2} \Leftrightarrow \underbrace{2 - \frac{8x^2}{3}}_{\rightarrow 2-0=2} \leq \frac{\ln(2 - \cos(2x))}{x^2} \leq \underbrace{2}_{\rightarrow 2}.$$

Eftersom uttrycket $\ln(2 - \cos(2x))/x^2$ är instängt mellan två funktioner som har samma gränsvärde då $x \rightarrow 0$, ger instängningsregeln att det sökta gränsvärdet existerar och är lika med det gemensamma värdet. Således

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos(2x))}{x^2} = 2.$$

Uppgift 9. De önskade egenskaperna beskriver följande villkor:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= f(2) \quad (\text{vänsterkontinuitet}) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &\neq f(2) \quad (\text{ingen högerkontinuitet}). \end{aligned}$$

Man behöver alltså bestämma de ensidiga gränsvärdena vid punkten $x = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 2 - 1 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - a) = 2 - a. \end{aligned}$$

Första kontinuitetsvillkoret ovan ger följande ekvation:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 1 = a^2 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Man har alltså fått två kandidater, $a = 1$ och $a = -1$. Dessa skall nu provas i högerdiskontinuitetsvillkoret $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq f(2)$, vilket alltså är ekvivalent med olikheten $2 - a \neq a^2$:

$$\begin{aligned} a = 1: \quad 2 - a \neq a^2 &\Leftrightarrow 2 - 1 \neq 1^2 \Leftrightarrow 1 \neq 1 \quad \text{falskt!} \\ a = -1: \quad 2 - a \neq a^2 &\Leftrightarrow 2 - (-1) \neq (-1)^2 \Leftrightarrow 3 \neq 1 \quad \text{stämmer!} \end{aligned}$$

Svar: Om $a = -1$, så blir funktionen vänsterkontinuerlig, men inte högerkontinuerlig vid $x = 2$.

Anmärkning: Om $a = 1$, så blir funktionen kontinuerlig vid $x = 2$ (vilket inte efterfrågats!)