

MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

Uppgift 1. Man får inte dividera med noll och så krävs det att $2 - x \neq 0$, d.v.s. $x \neq 2$. Dessutom är kvadratroten definierad endast för icke-negativa tal och så krävs det att $\frac{x-5}{2-x} \geq 0$. Denna olikhet löses m.h.a. följande teckenschema:

x		2		5	
$x - 5$	-	-	-	0	+
$2 - x$	+	0	-	-	-
$\frac{x-5}{2-x}$	-	↯	+	0	-

Svar: $D_f = (2, 5]$, d.v.s. $f(x)$ är definierad då $2 < x \leq 5$.

Uppgift 2. I skärningspunkten är båda ekvationerna uppfyllda samtidigt. Det innebär att man behöver lösa ut x ur ekvationen $3e^{4x} = e^{2x-1}$. Dividera båda leden med e^{2x} samt med 3 och därefter logaritmera ekvationen:

$$\begin{aligned} 3e^{4x} = e^{2x-1} &\Leftrightarrow e^{4x-2x} = \frac{1}{3e} \Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln\left(\frac{1}{3e}\right) \\ &\Leftrightarrow 2x = -\ln(3e) \Leftrightarrow x = \frac{-\ln(3e)}{2}. \end{aligned}$$

Vill man bestämma skärningspunktens y -koordinat, så sätts det funna x -värdet i $y = 3e^{4x}$:

$$y = 3e^{-4\ln(3e)/2} = 3e^{-2\ln(3e)} = 3e^{\ln((3e)^{-2})} = 3(3e)^{-2} = \frac{3}{9e^2} = \frac{1}{3e^2}.$$

Uppgift 3. Naturliga logaritmen och naturliga exponentialfunktionen är inversa till varandra och så är $\ln(e^2) = 2$ samt $e^{\ln 3} = 3$. Sedan används logaritmlagarna och basbytesformeln till att för enkla uttrycket.

$$\begin{aligned} 2 \lg 5 + \frac{\ln 6}{\ln 10} - \lg 15 + \ln(e^2) - e^{\ln 3} &= \lg(5^2) + \lg 6 - \lg 15 + 2 - 3 \\ &= \lg\left(\frac{25 \cdot 6}{15}\right) - 1 = \lg\left(\frac{150}{15}\right) - 1 = \lg 10 - 1 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Uppgift 4. (a) Tillämpa exponentialfunktionen på båda leden och därefter använd potenslagarna:

$$\begin{aligned} \ln 3 - \ln x &= \ln(x-4) - \ln 15 \Leftrightarrow e^{\ln 3 - \ln x} = e^{\ln(x-4) - \ln 15} \Leftrightarrow \frac{e^{\ln 3}}{e^{\ln x}} = \frac{e^{\ln(x-4)}}{e^{\ln 15}} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{x-4}{15} \Leftrightarrow 3 \cdot 15 = x(x-4) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 45 = 0. \end{aligned}$$

Enligt pq -formeln blir lösningarna $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 + 45} = 2 \pm 7$, alltså -5 och 9 .

Kontroll:

$$x = -5: \quad VL = \ln 3 - \ln(-5) = \text{↯ ↯ ↯} \quad \text{Således är } x = -5 \text{ en falsk rot!}$$

$$x = 9: \quad VL = \ln 3 - \ln 9 = \ln\left(\frac{3}{9}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$$

$$HL = \ln(9-4) - \ln 15 = \ln\left(\frac{5}{15}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3. \quad VL = HL.$$

(b) Via dubbla vinkelns formel

$$\begin{aligned}\sin v + \sin 2v = 0 &\Leftrightarrow \sin v + 2 \sin v \cos v = 0 \Leftrightarrow (1 + 2 \cos v) \sin v = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin v = 0 \\ \text{eller} \\ 1 + 2 \cos v = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin v = 0 \\ \text{eller} \\ \cos v = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow v = \begin{cases} k\pi = k \cdot 180^\circ \\ \text{eller} \\ \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi = \pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ, \end{cases}\end{aligned}$$

där $k \in \mathbb{Z}$ är godtyckligt.

(b) Via ekvation av typen $\sin \alpha = \sin \beta$

$$\begin{aligned}\sin v + \sin 2v = 0 &\Leftrightarrow \sin 2v = -\sin v \Leftrightarrow \sin 2v = \sin(-v) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2v = -v + 2k\pi \\ \text{eller} \\ 2v = \pi - (-v) + 2k\pi \end{cases} &\Leftrightarrow v = \begin{cases} \frac{2}{3}k\pi = k \cdot 120^\circ \\ \text{eller} \\ \pi + 2k\pi = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, \end{cases}\end{aligned}$$

där $k \in \mathbb{Z}$ är godtyckligt.

(b) Via formeln $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\begin{aligned}\sin v + \sin 2v = 0 &\Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{3v}{2}\right) \cos\left(\frac{-v}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3v}{2}\right) = 0 \\ \text{eller} \\ \cos\left(\frac{-v}{2}\right) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}v = k\pi \\ \text{eller} \\ \frac{1}{2}v = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} &\Leftrightarrow v = \begin{cases} \frac{2}{3}k\pi = k \cdot 120^\circ \\ \text{eller} \\ \pi + 2k\pi = 180^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}\end{aligned}$$

där $k \in \mathbb{Z}$ är godtyckligt.

Uppgift 5. (a) Cosinus av vinkeln bestäms m.h.a. cosinussatsen $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$:

$$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos \gamma \Leftrightarrow \frac{3}{-12} = \cos \gamma \Leftrightarrow \cos \gamma = \frac{-1}{4}.$$

Eftersom $\cos \gamma$ är negativt och $0^\circ < \gamma < 180^\circ$, ligger γ i 2:a kvadranten och så är den trubbig.

Anmärkning: $\gamma = \arccos\left(\frac{-1}{4}\right) \approx 104,5^\circ$.

(b) Trig:ettan ger

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \gamma = 1 - \left(\frac{-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Observera att $\sin \gamma$ är positivt eftersom γ ligger i 2:a kvadranten.

(c) Areasatsen ger

$$A = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{15}/4}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2$$

(d) Via areasatsen

$$A = \frac{bc \sin \alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \sin \alpha}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{15}}{3 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

(d) Via sinussatsen

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{2} = \frac{\sqrt{15}/4}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{15}}{4 \cdot 4} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Uppgift 6. (a) Formulering av Eulers formler:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{och} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \text{där } x \in \mathbb{R}.$$

Bevis 1. Eftersom $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, så kan man uttrycka $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$ och $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$. Dessutom gäller att $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$ och $\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/2i$. Således

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix} = \frac{e^{ix} + \overline{e^{ix}}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{och} \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix} = \frac{e^{ix} - \overline{e^{ix}}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad \text{V.S.B.}$$

Bevis 2. Definitionen av den komplexa exponentialfunktionen ger att

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{och} \quad e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \begin{cases} \cos \text{ jämnt} \\ \sin \text{ udda} \end{cases} = \cos x - i \sin x.$$

Således

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} &= \frac{\cos x + i \sin x + (\cos x - i \sin x)}{2} = \frac{2 \cos x}{2} = \cos x \quad \text{och} \\ \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} &= \frac{\cos x + i \sin x - (\cos x - i \sin x)}{2i} = \frac{2i \sin x}{2i} = \sin x. \end{aligned} \quad \text{V.S.B.}$$

(b) Eulers formel för sin samt kuberingsregeln " $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ " medför att

$$\begin{aligned} 4 \sin^3 x &= 4 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = 4 \cdot \frac{e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x}}{-8i} \\ &= \frac{3(e^{ix} - e^{-ix}) - (e^{i3x} - e^{-i3x})}{2i} = 3 \sin x - \sin 3x. \end{aligned} \quad \text{V.S.B.}$$

Uppgift 7. (a) Sätt $z = x + iy$, där $x, y \in \mathbb{R}$. Då blir $\bar{z} = x - iy$. Således lyder ekvationen

$$\begin{aligned} (2-i)(x+iy) &= (1+i)(x-iy) + 4 + 7i \Leftrightarrow 2x + y + i(2y-x) = x + y + 4 + i(x-y+7) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = x + y + 4 & (\operatorname{Re}) \\ 2y - x = x - y + 7 & (\operatorname{Im}) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 3y = 2x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{8+7}{3} = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Svar: $z = 4 + 5i$.

(b) Ansätt $z = x + iy$, där x och y är reella tal. Då blir

$$(x+iy)^2 = 8-6i \Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 = 8-6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 & (\operatorname{Re}) \\ 2xy = -6 & (\operatorname{Im}) \end{cases}$$

Man kan lägga till en tredje ekvation genom att beräkna absolutbeloppen av båda leden:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \quad (\operatorname{Abs})$$

(Re) + (Abs) ger $2x^2 = 10 + 8 = 18$ och så $x^2 = 9$, d.v.s., $x = \pm 3$. Från ekvationen (Im) får man att $y = -3/x = -3/\pm 3 = \mp 1$. Vi har alltså fått två lösningar:

$$z_1 = 3 - i \quad \text{och} \quad z_2 = -3 + i.$$

Uppgift 8. Gränsvärdet är av typen " $\infty - \infty$ " som kan undersökas enklare när uttrycket förlängs med konjugatet.

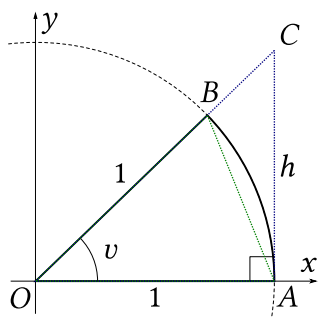
$$(x - \sqrt{x^2 - 6x + 5}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 6x + 5}}{x + \sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \frac{x^2 - (x^2 - 6x + 5)}{x + \sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \frac{6x - 5}{x + \sqrt{x^2 - 6x + 5}}$$

Nu ska den största potensen av x brytas ut och förkortas. Eftersom $x \rightarrow +\infty$, så $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

$$\frac{6x - 5}{x + \sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \frac{\cancel{x} \cdot (6 - \frac{5}{x})}{\cancel{x} \cdot (1 + \sqrt{1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}})} = \frac{6 - \frac{5}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}} \rightarrow \frac{6 - 0}{1 + \sqrt{1 - 0 + 0}} = 3$$

då $x \rightarrow \infty$.

Uppgift 9. Vinkeln v ligger i första kvadranten och så kan man ta fram två trianglar och cirkelsektorn på enhetscirkeln som i figuren nedan.



Areasatsen ger att arean av triangeln OAB = $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin v$.

Arean av cirkelsektorn OAB = $\pi r^2 \cdot \text{andelen av skivan} = \pi 1^2 \frac{v}{2\pi} = \frac{v}{2}$.

Arean av den rätvinkliga triangeln OAC = $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \tan v$.

Områdena ligger inuti varandra och så är

$$\text{Area}_{\triangle OAB} < \text{Area}_{\text{cirkelsektorn}} < \text{Area}_{\triangle OAC} \Leftrightarrow \frac{\sin v}{2} < \frac{v}{2} < \frac{\tan v}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin v < v < \tan v \quad \text{V.S.B.}$$

Uppgift 10. Varje stycke är en elementär funktion, vilket innebär att funktionen f är kontinuerlig på sin definitionsmängd utanför brytpunkterna mellan styckena. Således måste kontinuiteten kontrolleras vid brytpunkterna $x = 0$ och $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan 4x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin 4x}{\cos 4x} \cdot \frac{4x}{4x}}{\sin 2x \cdot \frac{2x}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{1}{\cos 4x} \cdot 4\cancel{x}}{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2\cancel{x}} = \frac{1 \cdot \frac{1}{\cos 0} \cdot 4}{1 \cdot 2} = 2,$$

$$f(0) = 0a + b = b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = 0a + b = b.$$

Kontinuiteten i punkten $x = 0$ kräver att

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow 2 = b = b.$$

Nu ska vi undersöka funktionens beteende vid punkten $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b = a + 2,$$

$$f(1) = 1a + b = a + 2,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})}{(3x+1) - (x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3})}{\cancel{2x-2}^2} = \frac{\sqrt{3 \cdot 1 + 1} + \sqrt{1 + 3}}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Kontinuiteten i punkten $x = 1$ kräver att

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow a + 2 = a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0.$$

Svar: Funktionen f är kontinuerlig på sin definitionsmängd om $a = 0$ och $b = 2$.