

Problem 1.2

$$(a) \quad y = \frac{1}{1+f(x)} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1+f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{y} - 1 = f(x) \\ \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{y} - 1\right) = x$$

Eftersom $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, måste uttrycket $\frac{1}{y} - 1$ tillhöra intervallet $[0, \infty)$.
 $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{V}_f$!

$$\frac{1}{y} - 1 \geq 0 \text{ uppfylls av } y \in (0, 1]$$

$$\therefore g'(y) = f^{-1}\left(\frac{1}{y} - 1\right) \text{ där } y \in (0, 1]$$

$$(b) \quad y = f(x^2) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x^2 \Leftrightarrow \pm \sqrt{f^{-1}(y)} = x$$

$\uparrow$ g är ej omvändbar

Om g restringeras till intervallet $[0, \infty)$, så blir $g'(y) = \sqrt{f^{-1}(y)}$ där $y \in [0, \infty)$

Om g däremot restringeras till intervallet $(-\infty, 0]$, så blir $g'(y) = -\sqrt{f^{-1}(y)}$, där $y \in \cancel{(-\infty, 0]} \cup [0, \infty)$

$$(c) \quad y = (f(x))^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(\sqrt{y}) = x$$

$\uparrow$ det var givet att $f(x) \geq 0$ för alla x
Gälesades är det inte $\pm \sqrt{y}$ på $\mathcal{V}_h$, utan bara $+\sqrt{y}$

$$\therefore g'(y) = f^{-1}(\sqrt{y}), \text{ där } y \in [0, \infty)$$

Problem 1.3/

$$y = \frac{x-a}{bx-c} \quad (\text{där } bx-c \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow y(bx-c) = x-a \Leftrightarrow ybx - yc = x-a$$

$$\Leftrightarrow ybx - x = yc - a \Leftrightarrow x \cdot (yb-1) = yc-a$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{yc-a}{yb-1}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{xc-a}{xb-1}$$

Man vill finna $a, b, c \in \mathbb{R}$ sådana att $f(x) = f^{-1}(x)$,

d.v.s.

$$\frac{x-a}{bx-c} = \frac{xc-a}{xb-1} \Leftrightarrow (x-a)(xb-1) = (xc-a)(bx-c)$$

$$\Leftrightarrow bx^2 - abx - x + a = bcx^2 - abx - c^2x + ac$$

Jämför koefficienterna vid motsvarande potenser av x :

$$\begin{array}{ll} \textcircled{x^2}: & b = bc \quad (\text{I}) \\ \boxed{x^1}: & -ab-1 = -ab-c^2 \quad (\text{II}) \\ \textcircled{x^0}: & a = ac \quad (\text{III}) \end{array}$$

$$(\text{II}) \Leftrightarrow c^2 = 1 \Leftrightarrow c = \pm 1.$$

Fall 1 - $c=1$: $\left. \begin{array}{l} (\text{I}) \text{ blir } b=b \\ (\text{III}) \text{ blir } a=a \end{array} \right\}$ vilket är uppfyllt för alla $a, b \in \mathbb{R}$

Lösning 1: $a, b \in \mathbb{R}$ godtyckliga, men $c=1$
alltså $f(x) = \frac{x-a}{bx-1} = f^{-1}(x)$

Fall 2 - $c=-1$: (I) blir $b=-b \Rightarrow b=0$
 (II) blir $a=-a \Rightarrow a=0$

Lösning 2: $a=b=0$ & $c=-1$, alltså $f(x)=x$

Problem 1.4

(a) Antag att $s > t$. Då är $f(s) > f(t)$, t.g. f är str. växande.

$$f(s) > f(t) \xLeftrightarrow{+g(s)} f(s) + g(s) > f(t) + g(s) \quad \begin{array}{l} \underbrace{g(s)}_{> g(t)} \text{ t.g. } g \text{ är str. v\u00e4x.} \\ \underbrace{}_{> f(t) + g(t)} \end{array}$$

$$\Rightarrow f(s) + g(s) > f(t) + g(t).$$

$\therefore f+g$ är str. växande

(b) Monotonitet kan \u00e4ndras om f och/eller g \u00e4r negativt

Ex: $f(x) = g(x) = -x \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = x^2$ vilket \u00e4r (str.)
\u00e5rtagande d\u00e4 $x \geq 0$

(c) Antag att $s > t$. D\u00e5 \u00e4r $z := g(s) > g(t) := w$.

Eftersom f \u00e4r str\u00e4ngt v\u00e4xande, s\u00e5 \u00e4r $f(z) > f(w)$,

d.v.s. $f(g(s)) > f(g(t))$

$\therefore f \circ g$ \u00e4r str. v\u00e4xande.

(d-a) Antag att $s > t$. D\u00e5 \u00e4r $f(s) < f(t)$, t.g. f \u00e4r str. \u00e5rtagande

$$f(s) < f(t) \xLeftrightarrow{+g(s)} f(s) + g(s) < f(t) + g(s) \quad \begin{array}{l} \underbrace{g(s)}_{< g(t)} \text{ t.g. } g \text{ \u00e4r \u00e5rtagande} \\ \underbrace{}_{< f(t) + g(t)} \end{array}$$

$$\Rightarrow f(s) + g(s) < f(t) + g(t)$$

$\therefore f+g$ \u00e4r str. \u00e5rtagande

(d-b) Monotonitet kan \u00e4ndras om f och/eller g \u00e4r negativt

Ex: $f(x) = g(x) = -x \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = x^2$ vilket v\u00e4xer d\u00e4 $x \geq 0$

(d-c) Ex: $f(x) = g(x) = -x \Rightarrow f(g(x)) = -(-x) = x$ vilket \u00e4r str.
v\u00e4xande