Problem 5.1

(a) $$\frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3} = \frac{2\sin x - 2\cdot \sin x\cos x}{x^3}$$

$$= \frac{2\cdot \sin x}{x}\cdot\frac{(1-\cos x)}{x^2} \to 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{då } x\to 0$$

$\frac{\sin x}{x} \to 1$ då $x\to 0$; $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$ då $x\to 0$

(b) $$\frac{3-4\cos x+\cos 2x}{x^4} = \frac{3-4\cos x+2\cos^2 x-1}{x^4}$$

$$= \frac{2\cos^2 x - 4\cos x + 2}{x^4} = \frac{2\cdot(\cos^2 x - 2\cos x + 1)}{x^4}$$

$$= \left| \begin{matrix}\text{KVADRERINGS-}\\ \text{REGELN}\end{matrix} \right| = \frac{2\cdot(\cos x - 1)^2}{x^4} = 2\cdot\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2$$

$\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$ då $x\to 0$

$$\to 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{då } x\to 0$$

(c) $$\lim_{x\to \pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot \tan x = \left| \begin{matrix}\text{subst.}\\ z = x-\frac{\pi}{2}\\ z\to 0 \Leftrightarrow x\to \pi/2\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{z\to 0} z\cdot \tan\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{z\to 0} z\cdot \frac{\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} = \left| \begin{matrix}\text{ADDITIONS-}\\ \text{FORMLERN}\end{matrix}\right|$$

$$= \lim_{z\to 0} z\cdot \frac{\cos z}{-\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{-\cos z}{\frac{\sin z}{z}} = \frac{-\cos 0}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$\frac{\sin z}{z} \to 1$ då $z\to 0$

Problem 5.2

(a) $$x^m - 1 = x^m - 1^m = \left| \text{generaliserade konjugatregeln} \right| =$$

$$= (x-1)\cdot\underbrace{\left(x^{m-1}\cdot 1^0 + x^{m-2}\cdot 1^1 + x^{m-3}\cdot 1^2 + \cdots + x^2\cdot 1^{m-3} + x^1\cdot 1^{m-2} + x^0\cdot 1^{m-1}\right)}_{m \text{ stycken termer}}$$

$$= (x-1)\left(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+x^1+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x^1+1)}=$$

(m stycken termer i täljaren, n stycken termer i nämnaren)

$$=\frac{1^{m-1}+1^{m-2}+\dots+1^1+1}{1^{n-1}+1^{n-2}+\dots+1^1+1}=\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1}=\frac{m}{n}$$

(b) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{m/p}-1}{x^{n/q}-1}=$$ | variabelbyte $x=t^{pq}$, $t=x^{1/pq}$ | ($x,t>0$)

$x\to 1 \iff t\to 1$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t^{pq})^{m/p}-1}{(t^{pq})^{n/q}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^{mq}-1}{t^{np}-1}=|(a)|=\frac{mq}{np}$$

(c) $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, nollskilda. $\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}=?$

basbyte för exponentialfunktionen ger

$$x^\alpha=\left(e^{\ln x}\right)^\alpha=e^{\alpha\cdot\ln x}$$

$$\therefore\ \frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}=\frac{e^{\alpha\cdot\ln x}-1}{e^{\beta\cdot\ln x}-1}=\frac{e^{\alpha\cdot\ln x}-1}{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)\cdot\frac{\beta\ln x}{e^{\beta\ln x}-1}\cdot\frac{1}{\beta\ln x}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x}\cdot\frac{\beta\ln x}{e^{\beta\ln x}-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\beta\ln x}{e^{\beta\ln x}-1}$$

$$=\text{| variabelbyte } y=\alpha\ln x,\ x\to 1\iff y\to 0;\quad z=\beta\ln x,\ x\to 1\iff z\to 0\ \text{|}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot 1\cdot 1$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}$$

Problem 5.3

(a) $(n+4)^{27} = n^{27} + 27 \cdot n^{26} \cdot 4 + P_{25}(n)$

$(n+1)^{27} = n^{27} + 27 \cdot n^{26} \cdot 1 + \tilde{P}_{25}(n)$ ← polynom med gradtal = 25

$\therefore (n+4)^{27} - (n+1)^{27} = 27 \cdot n^{26} \cdot 4 - 27 \cdot n^{26} \cdot 1 + P(n)$ ←

$= 81\, n^{26} + P(n)$

$(2n^2+5)^{13} = (2n^2)^{13} + Q_{24}(n) = 2^{13} n^{26} + Q_{24}(n)$

$= 8192\, n^{26} + Q_{24}(n)$

$(n^2-1)^{13} = (n^2)^{13} + \tilde{Q}_{24}(n) = n^{26} + \tilde{Q}_{24}(n)$ ← polynom med gradtal = 24

$\therefore (2n^2+5)^{13} - (n^2-1)^{13} = 8192\, n^{26} - n^{26} + Q(n)$ ←

$= 8191\, n^{26} + Q(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{27} - (n+1)^{27}}{(2n^2+5)^{13} - (n^2-1)^{13}} = \lim_{n\to\infty} \frac{81\, n^{26} + P(n)}{8191\, n^{26} + Q(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{81 + \frac{P(n)}{n^{26}}}{8191 + \frac{Q(n)}{n^{26}}} \quad \frac{P(n)}{n^{26}} \to 0, \quad \frac{Q(n)}{n^{26}} \to 0$$

$$= \frac{81+0}{8191+0} = \frac{81}{8191}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^3 \cdot \cos n + n^2 \sin n)^{100} - (n^3 \cdot \sin n + n^2)^{100}}{(n^9 + n^5 \cos n + n^2 \sin n)^{34}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3\cdot 100}\left(\left(\cos n + \frac{\sin n}{n}\right) - \left(\sin n + \frac{1}{n}\right)\right)^{100}}{n^{9\cdot 34}\left(1 + \frac{\cos n}{n^4} + \frac{\sin n}{n^7}\right)^{34}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n^6}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\left(\left(\cos n + \frac{\sin n}{n}\right) - \left(\sin n + \frac{1}{n}\right)\right)^{100}}{\left(1 + \frac{\cos n}{n^4} + \frac{\sin n}{n^7}\right)^{34}}}_{\text{instängd mellan } 0 \le \frac{4^{100}}{0{,}5^{34}} \text{ (väldigt grov uppskattning)}}$$

$= 0$ enligt instängningsregeln

Problem 5.4

Basbyte för exponentialfunktionen ger att

$$7^{\ln x} = \left(e^{\ln 7}\right)^{\ln x} = e^{\ln 7 \cdot \ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^{\ln 7} = x^{\ln 7}$$

$$\therefore \quad \frac{7^{\ln x}}{x^a} - bx = x^{\ln 7 - a} - bx =: f(x)$$

Fall 1: om $a = \ln 7$:

$$f(x) = x^0 - bx = 1 - bx$$

- $b > 0 \Rightarrow f(x) \to -\infty$
- $b = 0 \Rightarrow f(x) \to 1$
- $b < 0 \Rightarrow f(x) \to +\infty$

då $x \to \infty$

Fall 2: om $a \neq \ln 7$:

$$f(x) = x^{\ln 7 - a} - bx = x \cdot \left(x^{\ln 7 - a - 1} - b\right)$$

(i) om $a > \ln 7 - 1 = \ln\left(\frac{7}{e}\right)$, så är det "$bx$" som är domineranade:

- $b > 0$ $f(x) \to -\infty$
- $b = 0$ $f(x) \to 0$
- $b < 0$ $f(x) \to +\infty$

då $x \to \infty$

(ii) om $a = \ln 7 - 1 = \ln\left(\frac{7}{e}\right)$, så $f(x) = x - bx = x \cdot (1 - b)$

- $b > 1 \Rightarrow f(x) \to -\infty$
- $b = 1 \Rightarrow f(x) = 0$
- $b < 1 \Rightarrow f(x) \to +\infty$

då $x \to \infty$

(iii) om $a < \ln 7 - 1 = \ln\left(\frac{7}{e}\right)$, så är det "$x^{\ln 7 - a}$" som är domineranade

$\Rightarrow f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ (oavsett b)