

LISTA ÖVER TRYCKFEL I BLOMQVISTBÖCKERNA

MATEMATIK FÖR TEKNISKT BASÅR: DEL 2 (2018:S UPPLAGA)

Sid 36 – Svar till testuppg. 2.5 a): Svaret skall inte innehålla någon N . Det är alltså 1,16K.

Sid 55 – Avsnitt 3.7: Beviset av formeln $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ är **ofullständigt**. Det bevis som står i boken funkar endast **om** $0^\circ < u - v < 180^\circ$, eftersom $u - v$ ska vara en av de inre vinklarna i triangeln OAB .

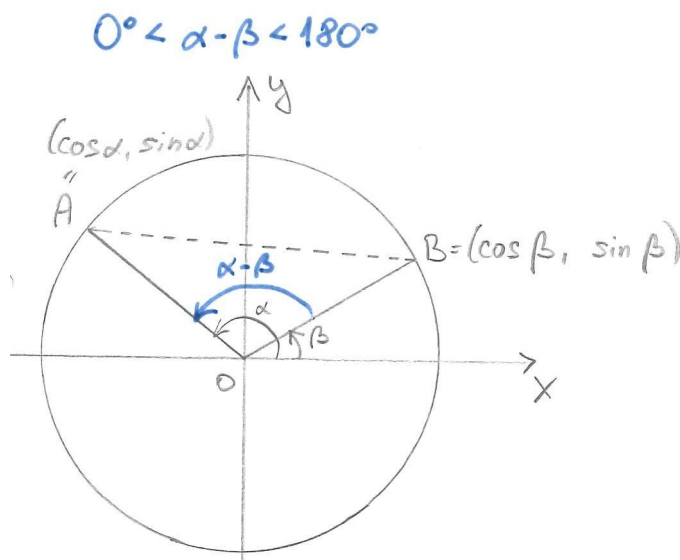
Här kommer ett fullständigt bevis för formeln $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, där α och β är godtyckliga vinklar. Det är flera fall som måste diskuteras:

Fall 1: $\alpha - \beta = 0$. Då får man $\alpha = \beta$ och

$$VL = \cos(\alpha - \beta) = \cos 0^\circ = 1; \quad HL = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \stackrel{\text{trig:ettan}}{=} 1.$$

Alltså $VL = HL$ och formeln är bevisat i detta fall.

Fall 2: $0^\circ < \alpha - \beta < 180^\circ$. I detta fall kan man följa det bevis som står i boken.



Enligt avståndsformeln är

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \beta - 2 \cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 1 + 1 - 2 \cos \beta \cos \alpha - 2 \sin \beta \sin \alpha = 2 - 2(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha). \end{aligned}$$

Enligt cosinussatsen i triangeln OAB är

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos(\alpha - \beta) = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta).$$

Man har alltså uttryckt $|AB|^2$ på två olika sätt och så måste dessa två uttryck vara lika:

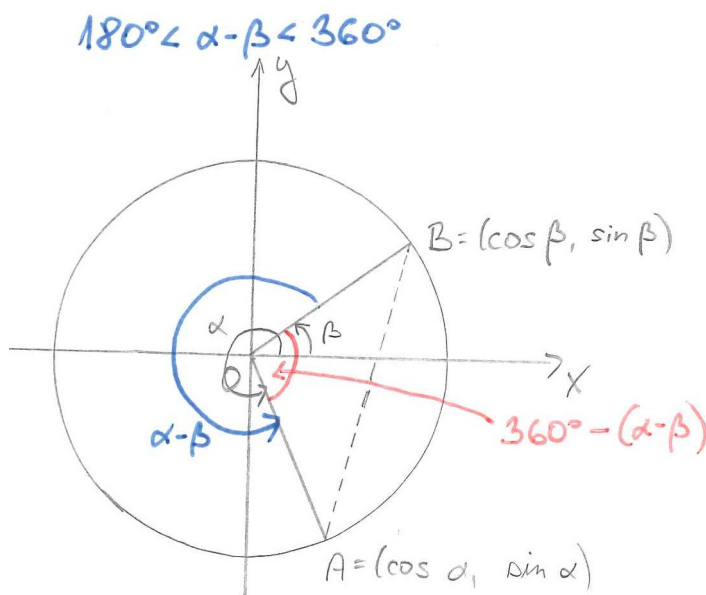
$$|AB|^2 = 2 - 2(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \Leftrightarrow \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \cos(\alpha - \beta)$$

och då är man klar med beviset i detta fall.

Fall 3: $\alpha - \beta = 180^\circ$. Då är $\alpha = 180^\circ + \beta$ och man får se i enhetscirkeln att $\cos \alpha = -\cos \beta$ och $\sin \alpha = -\sin \beta$. Således

$$VL = \cos(\alpha - \beta) = \cos 180^\circ = -1; \quad HL = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\cos^2 \beta - \sin^2 \beta \stackrel{\text{trig:ettan}}{=} -1.$$

Fall 4: $180^\circ < \alpha - \beta < 360^\circ$. I detta fall **behöver man modifiera** det bevis som står i boken.



Enligt avståndsformeln är

$$\begin{aligned}
 |AB|^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 \\
 &= \cos^2 \beta - 2 \cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha \\
 &= 1 + 1 - 2 \cos \beta \cos \alpha - 2 \sin \beta \sin \alpha = 2 - 2(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha).
 \end{aligned}$$

Enligt cosinussatsen i triangeln OAB är

$$\begin{aligned}
 |AB|^2 &= |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB| \cos(360^\circ - (\alpha - \beta)) \\
 (*) \quad &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(360^\circ - (\alpha - \beta)) = 2 - 2 \cos(360^\circ - (\alpha - \beta)).
 \end{aligned}$$

Eftersom $\cos$ är en jämn funktion som är 360° -periodisk, så är

$$\cos(360^\circ - (\alpha - \beta)) = \cos(-(\alpha - \beta)) = \cos(\alpha - \beta).$$

Då blir ekvationen (*) förenklad till $|AB|^2 = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta)$. Nu kan man fortsätta som i Fall 2: Man har uttryckt $|AB|^2$ på två olika sätt och så måste dessa två uttryck vara lika:

$$|AB|^2 = 2 - 2(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \Leftrightarrow \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \cos(\alpha - \beta)$$

och då är man klar med beviset i detta fall.

Fall 5: $\alpha - \beta < 0^\circ$ eller $\alpha - \beta \geq 360^\circ$. Man bildar en hjälpvinkel $\tilde{\alpha}$ genom att addera/subtrahera en lämplig multipel av 360° till vinkeln α så att $\tilde{\alpha} - \beta$ hamnar i intervallet $[0^\circ, 360^\circ)$. Alltså, $\tilde{\alpha} = \alpha + k \cdot 360^\circ$, respektive $\alpha = \tilde{\alpha} - k \cdot 360^\circ$, för något heltal k . Då är $\sin \tilde{\alpha} = \sin \alpha$ samt $\cos \tilde{\alpha} = \cos \alpha$ och så

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\tilde{\alpha} - k \cdot 360^\circ - \beta) = \left/ \begin{array}{l} \text{cosinus är} \\ 360^\circ\text{-periodisk} \end{array} \right/ = \cos(\tilde{\alpha} - \beta) = \left/ \begin{array}{l} \text{något av de fyra ovanstående} \\ \text{fallen ty } 0^\circ \leq \tilde{\alpha} - \beta < 360^\circ \end{array} \right/ \\
 &= \cos \tilde{\alpha} \cos \beta + \sin \tilde{\alpha} \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.
 \end{aligned}$$

Nu är man klar (på riktigt) med beviset av formeln $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

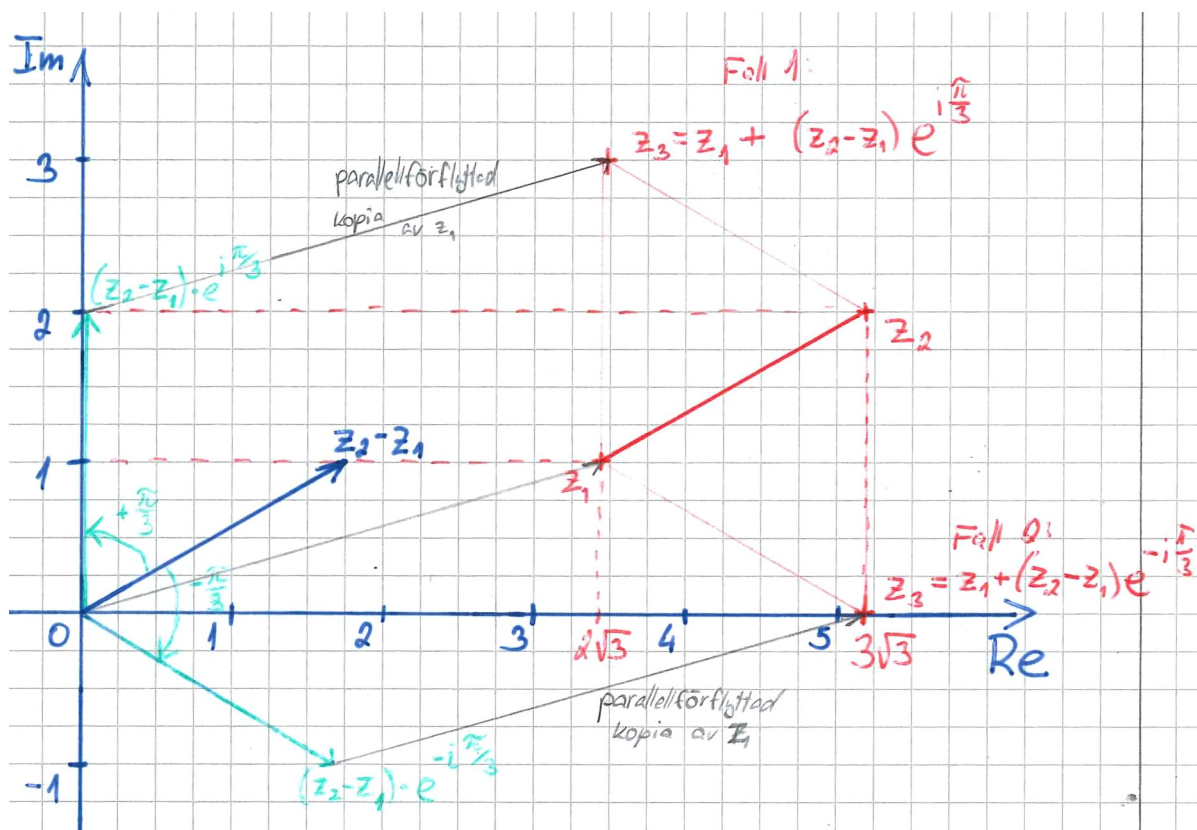
Sid 108 – Exempel 4.16: När man tar fram skillnaden $z_2 - z_1$, så är det inte riktigt den pil som börjar i punkten z_1 och slutar i punkten z_2 utan det är pilens parallellförflyttade kopia som börjar i origo. När man multiplicerar skillnaden $z_2 - z_1$ med talet $e^{i\pi/3}$ respektive $e^{-i\pi/3}$, så roterar man denna kopia med $\pm\pi/3$. Då får man en sträcka som har rätt längd och är korrekt orienterad, men börjar på fel ställe. Nämligen svarar produkten $(z_2 - z_1)e^{\pm i\pi/3}$ mot (orienterade) sträckan som börjar i origo. För att få talet z_3 så måste man flytta sträckan så att den börjar i punkten z_1 . Det gör man genom att addera z_1 . Svaren är alltså:

$$\begin{aligned}
 \text{Fall 1:} \quad z_3 &= z_1 + (z_2 - z_1)e^{i\pi/3} = (2\sqrt{3} + i) + 2e^{i\pi/6} \cdot e^{i\pi/3} \\
 &= (2\sqrt{3} + i) + 2e^{i(\pi/6 + \pi/3)} = (2\sqrt{3} + i) + 2e^{i\pi/2} = (2\sqrt{3} + i) + 2i = 2\sqrt{3} + 3i.
 \end{aligned}$$

och

Fall 2:
$$z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)e^{-i\pi/3} = (2\sqrt{3} + i) + 2e^{i\pi/6} \cdot e^{-i\pi/3}$$

$$= (2\sqrt{3} + i) + 2e^{i(\pi/6 - \pi/3)} = (2\sqrt{3} + i) + 2e^{-i\pi/6} = (2\sqrt{3} + i) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 3\sqrt{3}.$$



Sid 113 – Exempel 4.21: Den imaginära enheten kan betecknas i (vilket man brukar göra i matematiken) eller j (vilket man brukar göra i fysiken, framförallt i ellära, ty bokstaven i är reserverat för strömmen). I alla fall borde man inte blanda ihop de här beteckningarna. Man borde välja en av dessa bokstäver och hålla fast vid detta val. Tyvärr används både i och j i detta exempel.

Sid 131 – Räknelagen 5 ska lyda: Om $f(x) \leq g(x)$ för alla x i en punkterad omgivning av det reella talet a , så är $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Det är dock värt att påpeka att man får en icke-sträng olikhet för gränsvärdena även om det råder den stränga olikheten $f(x) < g(x)$ i den punkterade omgivningen av a .

Sid 292 – Svar till 1.5 c) skall vara: $f \circ \phi(x) = |x| = x$, där $x \geq 0$; $\phi \circ f(x) = x$, där $x \geq 1$.