MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2015-05-22 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Klas Modin

0708 456479

MVE425 del D / LMA164 del E

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs 32 resp. 42 poäng.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

---

1. Beräkna följande integraler. (9p)

(a) $\int x \sin 2x \, dx$ (b) $\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \, dx$ (c) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$

Lösning: (a) Partiell integration ger

$$\int x \sin 2x \, dx = x \frac{-\cos 2x}{2} - \int \frac{-\cos 2x}{2} \, dx = -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(b) Partialbråksuppdelning

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}$$

ger

$$A + B = 1, \quad 2A + B = 0 \iff A = -1, \quad B = 2$$

Alltså,

$$\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \, dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \right) dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C = \ln \frac{(x-2)^2}{|x-1|} + C$$

(c)

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{1}{t^3} \, dt = \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

2. Skriv den geometriska serien $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$ med summabeteckning. Hitta ett tal x så att serien blir konvergent med summan 4. (5p)

Lösning: Serien skrives

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}.$$

Om $x^2 < 1$ är summan konvergent och vi har att

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^2)^{k-1} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Summan 4 ger ekvationen

$$\frac{1}{1 - x^2} = 4 \iff 4(1 - x^2) = 1 \iff x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \iff x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En lösning är alltså $x = \sqrt{3}/2$ (alternativt $x = -\sqrt{3}/2$). Eftersom $x^2 = 3/4 < 1$ så är detta en godtagbar lösning.

3. Visa med induktion att (5p)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2, \quad n \geq 1$$

Lösning: I. Visa U(1) sann

$$\text{VL:} \quad \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1, \quad \text{HL:} \quad 1^2 = 1 \quad \Rightarrow \text{VL} = \text{HL, OK!}$$

II. Antag U(p) sann

$$\text{U(p):} \quad \sum_{k=1}^{p}(2k-1) = p^2 \quad \text{(ind. antagande)}$$

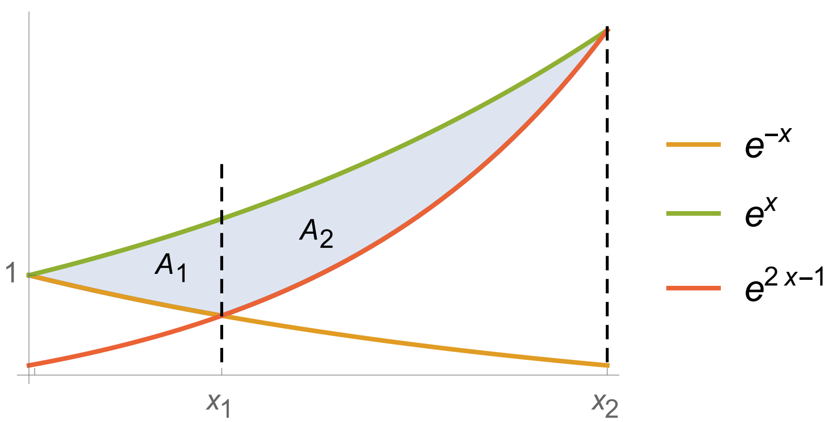
III. Visa U(p) sann $\Rightarrow$ U(p+1) sann

$$\text{U(p+1):} \quad \sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) = (p+1)^2$$

$$\text{VL:} \quad \sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) = 2(p+1) - 1 + \sum_{k=1}^{p}(2k-1) = 2p + 1 + \underbrace{p^2}_{\text{ind. ant.}} = (p+1)^2 = \text{HL}$$

Alltså gäller utsagan enligt induktionsprincipen.

4. Beräkna arean som begränsas av kurvorna $y = e^{-x}$, $y = e^x$, och $y = e^{2x-1}$. (6p)
(Tips: börja med att rita figur.)



Lösning:

Bestäm x_1:

$$e^{-x} = e^{2x-1} \iff -x = 2x - 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$$

Beräkna A_1:

$$A_1 = \int_0^{1/3} (e^x - e^{-x})\, dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^{1/3} = e^{1/3} + e^{-1/3} - 2.$$

Bestäm x_2:

$$e^x = e^{2x-1} \iff x = 2x - 1 \Rightarrow x_2 = 1.$$

Beräkna A_2:

$$A_2 = \int_{1/3}^{1} (e^x - e^{2x-1})\,dx = \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_{1/3}^{1} = e^1 - \frac{1}{2}e^{2-1} - e^{1/3} + \frac{1}{2}e^{2/3-1} = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^{-1/3} - e^{1/3}$$

Totala arean är alltså

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}e + \frac{3}{2}e^{-1/3} - 2$$

5. Lös differentialekvationerna (12p)

(a) $y' = y^2 e^x$ (b) $y' - \frac{y}{x} = x^2$ (c) $y'' + 5y' + 6y = 2x^2 + 3$

Lösning: (a) Separabel DE: Fall I, $y \neq 0$ ger

$$\frac{y'}{y^2} = e^x \Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int e^x\,dx \iff -\frac{1}{y} = e^x + C$$

$$\iff y = -\frac{1}{e^x + C}$$

Fall II, $y = 0$: är det en lösning? Ja, eftersom VL: $y' = 0$ och HL: $0e^x = 0$. Totalt har vi alltså lösningarna

$$y = -\frac{1}{e^x + C} \qquad \text{och} \qquad y = 0.$$

(b) Linjär första ordningens DE: integrerande faktorn är $e^{F(x)}$ där $f(x) = -1/x$. Alltså, en primitiv funktion till f ges av

$$F(x) = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x|.$$

Nu erhålls

$$e^{-\ln|x|}y' - e^{-\ln|x|}\frac{y}{x} = e^{-\ln|x|}x^2 \iff \frac{y'}{|x|} - \frac{y}{x|x|} = \frac{x^2}{|x|} \iff \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = x$$

$$\iff \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = x \iff \frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + C \iff y = \frac{x^3}{2} + Cx$$

(c) Linjär andra ordningens DE med konstanta koefficienter (icke-homogen). Den homogena lösningen först. KE ges av

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \iff (r+2)(r+3) = 0 \iff r_1 = -2, r_2 = -3.$$

Den lösningen till den homogena DE ges därvid av

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

Ansätt en partikulärlösning på formen $y_p = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Då gäller $y_p'' = 2a_2$, $y_p' = 2a_2x + a_1$. Insättning i VL ger:

$$2a_2 + 5(2a_2x + a_1) + 6(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 6a_2x^2 + (10a_2 + 6a_1)x + 2a_2 + 5a_1 + 6a_0$$

Jämförelse med HL ger:

$$6a_2 = 2 \iff a_2 = 1/3 \Rightarrow 10/3 + 6a_1 = 0 \iff a_1 = -5/9 \Rightarrow 2/3 - 25/9 + 6a_0 = 3 \iff a_0 = 23/27$$

En partikulärlösning ges alltså av

$$y_p = \frac{x^2}{3} - \frac{5x}{9} + \frac{23}{27}$$

Den allmänna lösningen till DE ges alltså av

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{x^2}{3} - \frac{5x}{9} + \frac{23}{27}$$

6. Ett föremål med massan 1 kg faller fritt mot marken under inverkan av två krafter: gravitationskraften $F_g = mg$ och en friktionskraft $F_f = -kv$, där v betecknar fallhastigheten av föremålet i m/s och proportionalitetskonstanten $k = 1\,\mathrm{kg/s}$. För enkelhets skull antar vi att gravitationskonstanten ges av $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. (5p)

(a) Använd Newtons andra lag $F = ma$ (m är massan och a är accelerationen) för att ställa upp en differentialekvation för hastigheten v som funktion av tiden t.

(b) Föremålet släpps vid tiden $t = 0$ (dvs vid den tidpunkten är $v = 0$). Vad blir hastigheten efter att föremålet har fått falla under lång tid? (Alltså, vad blir gränsvärdet av $v(t)$ då $t \to \infty$?)

Lösning: (a) Totala kraften är $F = F_g + F_f = 10 - v$. Eftersom $a = v'$ följer från Newtons andra lag att

$$ma = 1v' = 10 - v \iff v' + v = 10.$$

(b) Linjär första ordningens DE. Integrerande faktorn är e^t, ger

$$v = e^{-t} \int 10e^t \, dt + Ce^{-t} = 10 + Ce^{-t}$$

Villkoret $v(0) = 0$ ger $C = -10$ så $v(t) = 10(1 - e^{-t})$. Då $t \to \infty$ gäller att $e^{-t} \to 0$. Alltså

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{t \to \infty} \left(10 - 10e^{-t}\right) = 10$$

Alltså, hastigheten efter lång tid blir 10 m/s.

7. Areasatsen säger att om $f(x)$ är positiv och kontinuerlig i ett intervall I, och $A(x)$ betecknar arean under grafen från $x_0 \in I$ till $x \in I$ där $x \geq x_0$, då är $A'(x) = f(x)$. Bevisa detta. (4p)

Lösning: se boken.

8. Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (4p)

Lösning: se boken.

Lycka till!
Klas M