MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2015-06-05 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Klas Modin
0708 456479

MVE425 del D / LMA164 del E

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs 32 resp. 42 poäng.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

---

1. Beräkna: (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2}\,dx$, (b) $\displaystyle\int \tan x\,dx$, (c) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$. (3+3+3p)

Lösning:

(a)

$$\int \frac{1}{x^2+2}dx = \int \frac{1}{x^2+(\sqrt{2})^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

(b)

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left|\begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{matrix}\right| = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

(c)

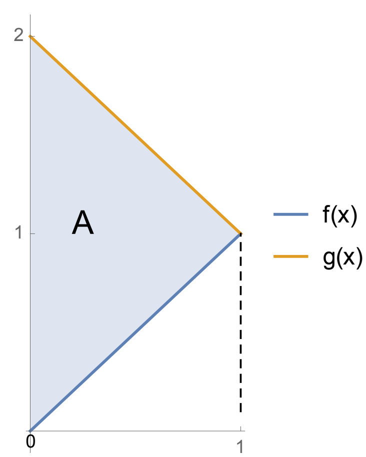
$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx &= \int 1\cdot\arcsin x\,dx = (PI) = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= x\arcsin x + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

2. Låt $f(x) = x$ och $g(x) = 2 - x$. Bestäm (3+3+3p)

(a) arean av det område som innesluts av y-axeln och graferna till funktionerna f och g,
(b) volymen av den rotationsvolym som området i (a) ger upphov till vid rotation runt x-axeln,
(c) volymen av den rotationsvolym som området i (a) ger upphov till vid rotation runt y-axeln.

Lösning:

(a)



Geometrisk lösning:

$$A = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Analytisk lösning:

$$A = \int_0^1 (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^1 (2 - x - x)\, dx = \left[2x - x^2\right]_0^1 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1.$$

(b) Volymen ges av volymen av rotationskroppen kring x-axeln för $g(x)$ minus volymen av rotationskroppen kring x-axeln för $f(x)$. Alltså:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 g(x)^2\, dx - \pi \int_0^1 f(x)^2\, dx = \pi \int_0^1 (g(x)^2 - f(x)^2)\, dx = \pi \int_0^1 ((2-x)^2 - x^2)\, dx \\ &= \pi \int_0^1 (4 - 2x + x^2 - x^2)\, dx = \pi \int_0^1 (4 - 2x)\, dx = \pi \left[4x - x^2\right]_0^1 = 3\pi. \end{aligned}$$

(c) För $y = f(x)$ gäller $y = x \iff x = y$. För $y = g(x)$ gäller $y = 2 - x \iff x = 2 - y$. Alltså, om vi uttrycker x som funktion av y får vi funktionen

$$h(y) = \begin{cases} y & \text{om } 0 \leq y < 1 \\ 2 - y & \text{om } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}.$$

Rotationskroppen där $h(y)$ roteras kring y-axeln ges därför av

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 h(y)^2\, dy = \pi \int_0^1 y^2\, dy + \pi \int_1^2 (2 - y)^2\, dy \\ &= \pi \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 + \pi \left[\frac{(y-2)^3}{3}\right]_1^2 = \frac{\pi}{3} - \pi \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

3. (a) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + \frac{2}{x} y = x^2$, $y(-1) = 0$. (4+4+4p)
(b) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = x^2(1 + y^2)$, $y(0) = 0$.
(c) Lös differentialekvationen $y'' + 2y' + 2y = x$.

Lösning:

(a) Linjär första ordningens DE. Integrerande faktorn är $e^{2 \ln |x|} = e^{\ln x^2} = x^2$. Alltså:

$$y' + \frac{2}{x} y = x^2 \iff \frac{d}{dx}(yx^2) = x^4 \iff yx^2 = \int x^4\, dx + C = \frac{x^5}{5} + C \iff y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$0 = \frac{(-1)^3}{5} + \frac{C}{(-1)^2} \iff C = \frac{1}{5}.$$

Lösningen är alltså

$$y = \frac{x^3}{5} + \frac{1}{5x^2} = \frac{1 + x^5}{5x^2}.$$

(b) Separabel första ordningens DE.

$$\begin{aligned} y' = x^2(1 + y^2) &\iff \frac{y'}{1 + y^2} = x^2 \iff \frac{d}{dx} \arctan y = x^2 \\ &\iff \arctan y = \int x^2\, dx + C = \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen ges alltså av

$$\arctan y = \frac{x^3}{3} + C \ \Rightarrow \ y = \tan(\frac{x^3}{3} + C)$$

Begynnelsevillkoret ger

$$0 = \tan(0 + C) \iff C = \pi n$$

för heltal n. Lösningen är alltså

$$y = \tan(\frac{x^3}{3} + \pi n).$$

Lösningen är oberoende av n eftersom $\tan(a + \pi n) = \tan(a)$ for alla reella a. Vi kan alltså anta att $n = 0$.

(c) KE är

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \iff (r + 1)^2 - 1 + 2 = 0 \iff r + 1 = \pm\sqrt{-1} \iff r_{12} = -1 \pm j.$$

Homogena lösningen ges alltså av

$$y_h = e^{-x}(A\cos x + B\sin x).$$

Ansätt partikulärlösningen $y_p = ax + b$, ger

$$0 + 2(a) + 2(ax + b) = x \iff 2ax + 2a + 2b = x \iff \begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -1/2 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

Alltså,

$$y_p = x/2 - 1/2 = \frac{x - 1}{2}.$$

Den allmänna lösningen ges nu av

$$y = y_h + y_p = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + \frac{x - 1}{2}.$$

4. Visa med induktion att $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$, $n \geq 1$. (6p)

Lösning:

Låt $U(n)$ vara utsagan $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$, $n \geq 1$.

Steg I (induktionsstarten): Visa $U(1)$ sann.

$VL_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ och $HL_1 = \frac{1(3 \cdot 1 - 1)}{2} = 1$. OK!

Steg II (induktionsantagandet): Antag $U(p)$ sann för $p \geq 1$. Betyder att

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3p - 2) = \frac{p(3p - 1)}{2}.$$

Steg III: Visa att $U(p)$ sann $\Rightarrow U(p + 1)$ sann.

$$U(p + 1) \text{ sann betyder}: \quad 1 + 4 + 7 + \ldots + (3p - 2) + (3p + 1) = \frac{(p + 1)(3p + 2)}{2}$$

$$VL_{p+1} = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3p - 2) + (3p + 1) = (\text{ind.ant.}) = \frac{p(3p - 1)}{2} + (3p + 1)$$

$$= \frac{p(3p - 1) + 2(3p + 1)}{2} = \frac{3p^2 + 5p + 2}{2} = \frac{(p + 1)(3p + 2)}{2} = HL_{p+1}.$$

Slutsats: Enligt induktionsprincipen följer att $U(n)$ är sann för alla $n \geq 1$.

5. Vid odling av en jästkultur är tillväxthastigheten proportionell mot mängden jäst. En sådan odling görs i en behållare från vilken man tappar ut a kg/h (kg jäst per timma). (3+3p)

(a) Antag att mängden jäst från början är y_0 kg och att proportionalitetskonstanten är 0,2 h^{-1}. Bestäm mängden jäst som funktion av tiden (timmar).

(b) Går det att välja a så att mängden jäst i behållaren hålls konstant? Hur ska man i så fall välja a? Motivera ditt svar.

Lösning:

(a) DE som beskriver förloppet blir $y' = ky - a$ där $k = 1/5$ är proportionalitetskonstanten, alltså $y' = y/5 - a$. Multiplikation med IF $e^{-t/5}$ ger

$$\frac{d}{dt}\left(ye^{-t/5}\right) = -ae^{-t/5} \iff ye^{-t/5} = -a\int e^{-t/5}dt + C = 5ae^{-t/5} + C.$$

$$\iff y = Ce^{t/5} + 5a.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = y_0$ ger

$$y_0 = C + 5a \iff C = y_0 - 5a.$$

Alltså, **SVAR:** mängden jäst som funktion av tiden ges av

$$y(t) = (y_0 - 5a)e^{t/5} + 5a.$$

(b) **SVAR:** Ja, det går. Välj $a = y_0/5$. Då gäller

$$y(t) = \underbrace{(y_0 - 5\frac{y_0}{5})}_{0}\, e^{t/5} + 5\frac{y_0}{5} = y_0.$$

Alltså, mängden jäst hålls konstant över tiden.

6. Bevisa att $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$ (4p)

Lösning: Se boken.

7. Bevisa integreringsregeln (PI) $\displaystyle\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$ (4p)

Lösning: Se boken.

Lycka till!
Klas M