

LÖSNINGAR DUGGA I MVE460 HT2017

Torsdag den 28 september, 8⁰⁰ – 8⁴⁵

1. Bestäm eventuella asymptoter till funktionen $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2}$.

Vi ser att nämnaren i funktionen ges av $N(x) = x^2 - 2$, och har därmed att $N(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$, vilket innebär att $D_f = \{x; x \neq \pm\sqrt{2}\}$.

Lodräta asymptoter: Vi har möjliga lodräta asymptoter i $x = -\sqrt{2}$ och $\sqrt{2}$. Nära dessa beter sig funktionen enligt:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} \frac{x^3}{x^2 - 2} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} \frac{x^3}{x^2 - 2} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{x^3}{x^2 - 2} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{x^3}{x^2 - 2} &= -\infty\end{aligned}$$

Vi har alltså lodräta asymptoter i $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

Vågräta asymptoter: Vi har att

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 2} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 2} &= -\infty\end{aligned}$$

Alltså finns inga vågräta asymptoter.

Sneda asymptoter: Vi har att

$$\begin{aligned}k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3(1 - 2/x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - 2/x^2} = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 2} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 2)}{x^2 - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x - 2/x} = 0\end{aligned}$$

Alltså $y = kx + m = 1x + 0 = x$ är en sned asymptot då $x \rightarrow \pm\infty$.

2. (a) Låt $f(x) = \frac{1}{\cos(x^2)}$. Beräkna $f'(x)$.

$$f'(x) = -\frac{2x(-\sin(x^2))}{(\cos(x^2))^2} = \frac{2x \tan(x^2)}{\cos(x^2)}$$

(b) Bestäm på vilka intervall funktionen $f(x) = \arctan(x)$ är konvex.

Funktionen är konvex där $f''(x) > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

och

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Vi noterar att nämnaren är positiv för alla x . Däremot är $-2x < 0$ för $x > 0$ och $-2x > 0$ för $x < 0$. Alltså har vi att $f(x)$ är konvex på intervallet $(-\infty, 0)$.

3 (a) Falskt. Motexempel är $f(x) = |x|$ som är kontinuerlig i $x = 0$ men ej deriverbar i denna punkt.

(b) Sant. Satsen om största och minsta värde garanterar existensen av ett största värde för alla kontinuerliga funktioner definierade på slutna intervall. Att funktionen är deriverbar spelar ingen roll.

(c) Falskt. Enligt definitionen av inflektionspunkt måste vi också ha teckenväxling av $f''(x)$ runt punkten.

(d) Sant. Om $f'(x) > 0$ på $[a, b]$ så är $f(x)$ växande på $[a, b]$. För $x_1 < x_2$ gäller därför att $f(x_1) < f(x_2)$ vilket medför att $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$. Alltså är $f(x)$ injektiv (one-to-one) på $[a, b]$ och en invers existerar.