Lösningar till tentamen för MVE460

Tisdag den 8:e januari, $8^{30} - 12^{30}$

1. Se kurslitteraturen (Adams s. 109).

2. Se kurslitteraturen (Adams s. 90).

2. Låt $f(x) = x - \sqrt{1+x}$. Vi börjar med att bestämma definitionsmängd, och noterar att $\sqrt{1+x}$ endast är definierad då argumentet $1+x \geq 0$, dvs. då $x \geq -1$. Vi har alltså att $D_f = [-1, \infty)$.

Kontinuitet. Eftersom funktionen består av sammansättning av funktioner som är kontinuerliga i hela D_f så är f också kontinuerlig.

Lodräta asymptoter. Vi undersöker ändpunkten $x = -1$ där en lodrät asymptot kan finnas.

$$\lim_{x \to -1^+} x - \sqrt{1+x} = -1 - \sqrt{1-1} = -1,$$

Gränsvärdet är ändligt och därmed existerar inga lodräta asymptoter.

Vågräta asymptoter. Vågräta asymptoter ges av gränsvärden då $x \to \pm\infty$, men eftersom $D_f = [-1, \infty)$ så behöver vi bara undersöka $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} x - \sqrt{1+x} = \infty$$

eftersom x växer snabbare än $\sqrt{1+x}$ då $x \to \infty$. Därmed finns ingen vågrät asymptot då $x \to \infty$.

Sneda asymptoter. Vi har en möjlig sned asymptot då $x \to \infty$ och undersöker eventuellt k-värde.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \to \infty} 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} == \lim_{x \to \infty} 1 - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1 - 0 = 1$$

eftersom $1/x$ och $1/x^2$ går mot noll då $x \to \infty$.

m-värdet för asymptoten ges nu av:

$$m = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\infty} x - \sqrt{1+x} - x = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+x} = \infty$$

Men eftersom gränsvärdet inte är ändligt existerar ingen sned asymptot.

Kritiska punkter. Vi har att $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. Kritiska punkter ges av

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \iff & 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0 \\ \iff & \sqrt{1+x} = 1/2 \\ \iff & x = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Singulära punketer. Detta är punkter där $f'(x)$ är odefinierad. Vi ser att nämnaren i $f'(x)$ är lika med noll då $x = -1$ vilket medför att $x = -1$ är en singulär punkt. Vi kan också sluta oss till att $x = -1$ är en lokal extrempunkt.

Inflektionspunkter. Vi har att $f''(x) = \frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$ som är positivt för alla $x \in D_f$ och därmed existerar inga inflektionspunkter. Vi kan också notera att funktionen är konvex i hela D_f.

Teckentabell. Vi gör nu en teckentabell med följande intressanta punkter: $-1, -3/4$.

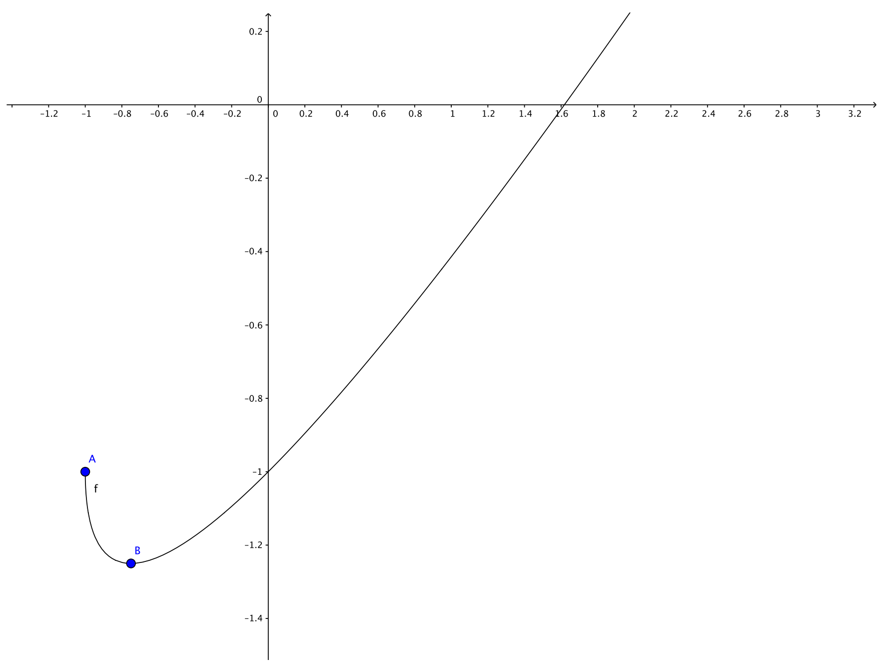
x	-1		$-3/4$	
f'	odef.	$-$	0	$+$
f''	odef.	$+$	$+$	$+$
f	-1	$\searrow$	$-5/4$	$\nearrow$

Från tabellen ser vi att $x = -3/4$ är ett lokalt minimum och här antar funktionens sitt minsta värde $f(-3/4) = -5/4$. Vi har också ett lokalt maximum i $x = -1$, där värdet är $f(-1) = -1$. Eftersom funktion växer obegränsat då $x \to \infty$ så existerar inget största värde.

Derivatans tecken visar att funktionen är växande på $[-3/4, \infty)$ och avtagande på $(-1, -3/4]$.

Andraderivatans tecken visar att funktionen är konvex på hela D_f och inte konkav någonstans.

Vi skissar nu grafen med hjälp av ovanstående information (se nedan).



A
B
f
0

4. För att approximera $\sin(0.1)$ låter vi $f(x) = \sin x$ och beräknar Taylorpolynomet för f av ordning 3 kring $x = 0$.

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3$$

Derivatorna ges av $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ och $f'''(x) = -\cos x$ vilket medför att

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

Vi får därför att

$$\sin(0.1) = f(0.1) \approx P_3(0.1) = 0.1 - \frac{0.1^3}{6} = 0.1 - 10^{-3}/6.$$

Felet $E_3(x) = f(x) - P_3(x)$ ges av

$$E_3(x) = \frac{f^{(4)}(s)}{4!}(x-0)^4$$

där $s \in (0, x)$. Fjärdederivatan ges av $f^{(4)}(x) = \sin x$ varför felet i punkten $x = 0.1$ kan skrivas

$$E_3(0.1) = \frac{f^{(4)}(s)}{4!}0.1^4 = \frac{10^{-4}}{24}\sin s.$$

där $s \in (0, 0.1)$. Eftersom $\sin s > 0$ kan vi dra slutsatsen att felet är positivt. För att bestämma dess storlek betraktar vi

$$|E_3(0.1)| = \left|\frac{10^{-4}}{24}\sin s\right| = \frac{10^{-4}}{24}|\sin s| < \frac{10^{-4}}{24}$$

eftersom $|\sin s| < 1$ för alla s. Vi har alltså att

$$0 < E_3(0.1) < \frac{10^{-4}}{24}$$

vilket betyder att det verkliga värdet ligger i intervallet

$$P_3(0.1) < \sin(0.1) < P_3(0.1) + \frac{10^{-4}}{24}$$

eller

$$0.1 - \frac{10^{-3}}{6} < \sin(0.1) < 0.1 - \frac{10^{-3}}{6} + \frac{10^{-4}}{24}$$

5. Vi noterar först att f är definierad för alla reella tal och att definitionsmängden därför ges av $D_f = \mathbb{R}$, som är ett sammanhängande intervall. Derivatan ges av

$$f'(x) = 2e^{2x+3}$$

och eftersom $e^x > 0$ för alla x ser vi att $f'(x) > 0$ för alla $x \in D_f$. Det innebär att f är strängt växande vilket medför att f är injektiv och att det existerar en invers.

För att beräkna $(f^{-1})'(e)$ noterar vi att $f(-1) = e^{2(-1)+3} = e^1 = e$. Det medför att $f^{-1}(e) = -1$ och vi kan använda formeln för inversens derivata

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(f^{-1}(e))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{2e}.$$

Alternativt kan man explicit beräkna inversen som ges av $f^{-1}(x) = \frac{\ln x - 3}{2}$ och uitfrån den beräkna $(f^{-1})'(e)$.

6. De fyra punkterna $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (-2,0,-2)$, $P_3 = (-1,1,0)$ och $P_4 = (1,0,-1)$ ligger i samma plan om de tre vektorer, som går från en av dessa punkter till tre andra punkterna, ligger i ett plan. Vi utgår från P_1 och beräknar $\vec{P_1P_2} = (-3,-1,-3)$, $\vec{P_1P_3} = (-2,0,-1)$ och $\vec{P_1P_4} = (0,-1,-2)$.

Dessa tre vektorer ligger i ett plan om vektorn $\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}$ är vinkelrät mot $\vec{P_1P_4}$, dvs. om $\vec{P_1P_4} \cdot (\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}) = 0$. Detta är den skalära trippelprodukten som vi kan beräkna med hjälp av en determinant:

$$\vec{P_1P_4} \cdot (\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 + 4 - 6 = 1 \neq 0.$$

Eftersom den skalära trippelprodukten är skild från noll så ligger punkterna ej i samma plan.

7. Vi börjar med att räkna ut riktningsvektorn för den givna linjen $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$ genom att sätta alla tre led lika med t och lösa ut x, y och z. Detta ger

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

och vi kan läsa ut riktningsvektorn som $\mathbf{v} = (-2, -2, 2)$. Vi ska nu försöka hitta ett värde på A sådant att skärningslinjen mellan planen är parallell med $\mathbf{v}$. För att hitta skärningslinjen löser vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + Az = 4. \end{cases}$$

Om vi multiplicerar första ekvationen med -2 och lägger till den andra får vi att $y + (A-6)z = 2$. Vi sätter nu $z = t$ en fri variabel vilket ger att $y = 2 - (A-6)t$. Insatt i den första ekvationen får vi då att $x + 2(2 - (A-6)t) + 3t = 1$ vilken har som lösning $x = -3 + (2A - 15)t$. Skärningslinjen mellan planen ges alltså av

$$\begin{cases} x = -3 + (2A - 15)t \\ y = 2 + (6 - A)t \\ z = t \end{cases}$$

som har riktningsvektor $\mathbf{u} = (2A - 15, 6 - A, 1)$. Denna är parallell med $\mathbf{v}$ om det existerar ett tal $\lambda \neq 0$ sådant att $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$, eller

$$\begin{cases} -2 = \lambda(2A - 15) \\ -2 = \lambda(6 - A) \\ 2 = \lambda. \end{cases}$$

Från den sista ekvationen ser vi att $\lambda = 2$ och ur de två andra får vi att $A = 7$.

8. Vi beräknar derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Detta medför att $f(x) =$ konstant, men definitionsmängden består av två intervall vilket betyder att f kan ta olika värden på $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Vi kollar de två fallen

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2\arctan(1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$
$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = 2\arctan(-1) = 2\frac{-\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Vi har alltså att

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{om } x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

och f antar bara två värden.