Sammanfattning av föreläsning 3

Kapitel 6, avsnitt 6.1-6.6, lite på avsnitt 7.1

En vektor med längd 1 kallas enhetsvektor (unit vector). Vektorn $\boldsymbol{e} := \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|}\boldsymbol{u}$ är en enhetsvektor, om $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$.

Vinkel mellan vektorer
Skalär produkt (inner product), (Vinkelrät) Projektion
Den är kommutativ och *distributiv*.
Speciellt för parallella och vinkelräta vektorer.

Skalär produkt (inner product) av två vektorer $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\ \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$, så att för mellanliggande
$-\|\boldsymbol{a}\|\ \|\boldsymbol{b}\| \leq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leq \|\boldsymbol{a}\|\ \|\boldsymbol{b}\|$
vinkel mellan 0 och 180 grader.

Speciellt $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{cases} 0, & \text{om } \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \\ \|\boldsymbol{a}\|\ \|\boldsymbol{b}\| & \text{om } \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \end{cases}$ och $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2$

speciellt är $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2$.

Tillsammans med distributiva lagen följer att
$\|u+v\|^2 =$
$(\|u\|)^2 + |(|v\|)^2 + 2\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \leq (\|u\|)^2 + |(|v\|)^2 + 2\,\|\boldsymbol{u}\|\ \|\boldsymbol{v}\| = (\|u\| + \|v\|)^2$ eller ekvivalent :
$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, triangelolikheten för vektorer.

Definition: Linjärkombinationerna av egenvektorerna svarande mot *samma* egenvärde,
ugör elementen i *egenrummet* (Eigenspace) (till egenvärdet).

Annorlunda uttryckt
Ett egenrum är det vektorrum/linjära rum, som spänns upp av egenvektorerna, svarande mot ett egemvärde λ .

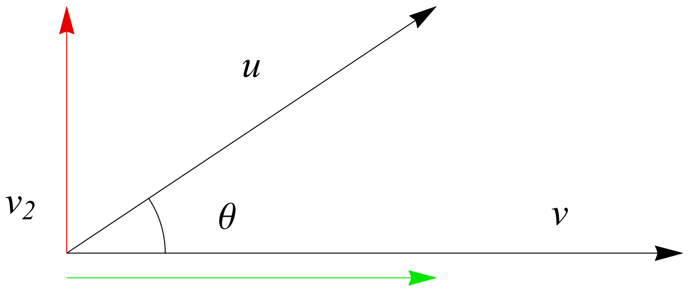
(Definition av skalär produkt (inner product) enligt boken, som är en sats för oss.
$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k\, v_k$)

(Speciellt är, se sidan 349 Theorem 1, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{n} {u_k}^2 \geq 0$ med likhet omm $u = 0$, nollvektorn.
Längden av $\boldsymbol{u}$ definieras som $\sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}} = \|\boldsymbol{u}\|$.)

Kommentarer. Med denna definition av skalär produkt, följer, som teorem/sats i boken att
$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\ \|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$ för mellanliggande vinkel till vektorerna.

(Kommentar: Här *råkar* vektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ vara parvis ortogonala.)

6.3 Ortogonal projektion (av vektor på vektor)



Den gröna vektorn är $\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\,\boldsymbol{v}$ (ortogonala projektionen av u på v)

Den röda vektorn är $\boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\,\boldsymbol{v}$ och är ortogonal mot $\boldsymbol{v}$.

6.4 Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess

Givet ett antal linjärt oberoende vektorer $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Vektorerna $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_k\}$ konstruerade som nedan är ortogonala och är bas i samma underrum som $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$.

$$v_k = x_k - \frac{\boldsymbol{v}_1\cdot x_k}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\,\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_2\cdot x_k}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\,\boldsymbol{v}_2 \ldots - \frac{\boldsymbol{v}_{k-1}\cdot x_k}{\|\boldsymbol{v}_{k-1}\|^2}\,\boldsymbol{v}_{k-1}$$

7.1

Definition: En symmetrisk matris uppfyller $A^T = A$.

Det betyder att A måste vara kvadratisk och elementen på platserna (j, k) och (k, j) är lika.

Matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ är inte symmetrisk, ty inte ens kvadratisk.

Matrisen $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ är symmetrisk, omm $a = -3$.