MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2012-09-01 kl. 14.00–18.00

Tentamen Telefonvakt: Magnus Önheim

tel. 0703-088304

TMV036 Analys och Linjär Algebra K Kf Bt, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 10/11 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (11/12) webbsida senast 2/9. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. Given är ytan $z = f(x, y) = 1 + \ln(1 + x^2 + y^2)$.

(a) Bestäm ytans nivåkurvor och skissa ytan. (2p)

(b) Bestäm en normal till ytan i punkten $(1, -2, 1 + \ln 6)$. (2p)

(c) Bestäm en normal till nivåkurvan $f(x, y) = \ln 5 + 1$ i punkten $(\sqrt{3}, 1)$. (2p)

2. Låt $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$.

(a) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(1, 1)$ i riktningen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$. (2p)

(b) Bestäm alla kritiska punkter till f. För en av dem ange dess karaktär (lokalmaximum, lokal minimum, sadelpunkt). Valet är Ditt. (4p)

3. (a) Beräkna arean av ytan $\mathcal{Y}$: $r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u^2, 2uv, 2v^2)$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 1$. (3p)

(b) Beräkna trippelintegralen (3p)

$$\iiint_D xz dxdydz,$$

där $D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq y, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

4. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ har vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som egenvektor.

(a) Bestäm talet a och matrisens samtliga egenvärden och egenvektorer. (3p)

(b) För a i (a) lös följande system av differentialekvationer $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ med $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Skissa lösningens trajektorie. (3p)

Var god vänd!

5. (a) Förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning. (2p)

(b) Betrakta de fyra punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, a)$ där a är en reell parameter. Visa att den linje $y = kx + l$ som bäst ansluter till de givna punkterna i minstakvadratmetodens mening alltid går genom punkten $(-1/3, 1/2)$ oavsett vilket värde man sätter på a. (5p)

6. Låt $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y^2 + \dfrac{\sin x}{1 + x^2})\mathbf{i} + 2y(x^3 + e^{-y^2})\mathbf{j}$.

(a) Låt γ vara linjestycket från $(-2, 2)$ till $(2, -2)$. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (2p)

(b) Är $\mathbf{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? Motivera väl. (2p)

(c) Beräkna det arbete som $\mathbf{F}$ uträttar då en partikel förflyttas från $(-2, 2)$ till $(2, -2)$ medurs längs ellipsen $2x^2 + 3y^2 = 20$. (2p)

7. Visa att $x + y + z \geq 3$ för alla positiva reella tal sådana att $xyz = 1$. (6p)

8. I kursen har vi visat resultat som handlar om egenskaper hos egenevektorer som svarar mot olika egenvärden till en matris. I del (a) skall du visa ett av dessa specialfallet med bara två egenvektorer. Det blir poängavdrag om du skriver ner beviset i det almänna fallet och sedan lägger till ”sätt $p = 2$”eller liknande.

Antag alltså att vi har två egenvektorer till en matris som svarar mot olika egenvärden.

(a) Visa att de två egenvektorerna är linjärt oberoende. (5p)

(b) Kan matrisen ha tre olika egenvärde om den är en 2×2-matris. Motivera väl Ditt svar. (2p)

Lycka till!
Lyudmila T

Lösningar

1. (a) Ytans nivåkurvor ges av $1 + \ln(1 + x^2 + y^2) = c$ för olika värde på konstanten c. Eftersom $1 + (x^2 + y^2) \geq 1$, $\ln(1 + x^2 + y^2) \geq \ln 1 = 0$ och därmed $c \geq 1$. Vi har

$$1 + \ln(1 + x^2 + y^2) = c \Leftrightarrow \ln(1 + x^2 + y^2) = c - 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = e^{c-1} - 1.$$

Nivåkurvorna är alltså cirklar med centrum i origo. Ytan är en paraboloid.

(b)

$$f'_x = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad f'_y = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$

En normal till ytan i punkten $(1, -2, 1 + \ln 6)$ ges av

$$(f'_x(1, -2), f'_y(1, -2), -1) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1).$$

(c) En normal till nivåkurvan ges av $\mathrm{grad}(f)(\sqrt{3}, 1) = (\frac{2\sqrt{3}}{5}, \frac{2}{5})$.

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 9y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 9x.$$

(a) Vi normerar riktningsvektorn: $||\mathbf{v}|| = \sqrt{5}$, $\mathbf{u} := \mathbf{v}/||\mathbf{v}|| = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Den sökande riktningsderivatan är

$$f'_{\mathbf{v}}(1, 1) = \mathrm{grad}(f)(1, 1) \cdot \mathbf{u} = (-6, -6) \cdot (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) = -18/\sqrt{5}.$$

(b) De kritiska punkterna ges av systemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 3x^2 - 9y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 3y^2 - 9x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2/3 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2/3 \\ x^4 - 27x = x(x^3 - 27) = 0 \end{cases}$$

Systemets lösningar och därmed funktionens kritiska punkter blir alltså $(0, 0)$ och $(3, 3)$. För att bestäma punkternas karaktär beräknar vi funktionens andra derivator och Hessianen i respektive punkterna:

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = 9, \quad f''_{yy} = 6y.$$

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}(3, 3) = \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}.$$

Eftersom $\det(\mathcal{H}(0, 0)) < 0$, är $(0, 0)$ en sedelpunkt; $(3, 3)$ är en lokal minimipunkt, ty $\det(\mathcal{H}(3, 3)) > 0$ och $f''_{xx}(3, 3) > 0$.

3. (a) Vi har

$$\mathbf{r}_u = (2u, 2v, 0), \mathbf{r}_v = (0, 2u, 4v) \text{ och } \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 2v & 0 \\ 0 & 2u & 4v \end{vmatrix} = 8v^2\mathbf{i} - 8uv\mathbf{j} + 4u^2\mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned} \text{Arean av } Y &= \int_0^1 \int_0^2 ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|| du dv = \int_0^1 \int_0^2 4\sqrt{4v^4 + 4u^2v^2 + u^4} du dv \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^2 (2v^2 + u^2) du dv = 4 \left(\left[\frac{u^3}{3} \right]_0^2 \int_0^1 dv + \left[\frac{2v^3}{3} \right]_0^1 \int_0^2 du \right) \\ &= 4 \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} \right) = 16. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int\int\int_D xzdxdydz &= \int\int_{\substack{x^2+y^2\le 4\\ x\ge 0,\, y\ge 0}} \left(\int_0^y (xz)dz\right) dxdy \\
&= \int\int_{\substack{x^2+y^2\le 4\\ x\ge 0,\, y\ge 0}} \frac{xy^2}{2} dxdy \\
&= |\text{Polära koordinater}| = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \frac{r\cos\varphi r^2\sin^2\varphi}{2} rdrd\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^5}{10}\right]_0^2 \sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi \\
&= |\text{Variabelbyte } t=\sin\varphi| = \frac{16}{5}\int_0^1 t^2dt = \frac{16}{15}.
\end{aligned}$$

4. (a) Vi beräknar

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2+a \end{bmatrix}.$$

För att $\mathbf{v}$ skall vara en egenvektor måste

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2+a \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ för något } \lambda,$$

vilket ger $\lambda = 3$, $2+a=3$ och därmed $a=1$.
Med $a=1$ fås egenvärden ur

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0.$$

Vi har alltså $\lambda = 3$ och $\lambda = -1$
Samtliga egenvektorer till $\lambda = 3$ ges av $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.
Egenvektorerna till $\lambda = -1$ bestäms ur ekvationen $(A+I)\mathbf{x} = 0$:

$$A+I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att matrisens nollrum spänns upp av vektorn $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och A:s egenvektorer till $\lambda = -1$ är $t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

(b) Lösningar till systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ ges av $\mathbf{x}(t) = C_1e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Sätt in $t=0$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0) = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

varav

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

och

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t}+e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} \end{bmatrix}.$$

5. (a) Se kursboken

(b) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}.$$

Koefficienter (k, l) sådana att linjen $y = kx + l$ bäst ansluter till de givna punkterna i minstakvadratmetodens mening uppfyller systemet

$$A^T A \begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix} = A^T \mathbf{b}.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix} &= (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2+a \\ 1+2a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+a \\ 1+2a \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 5+a \\ 3a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sätt nu $x = -1/3$ in i linjens ekvation $y = kx + l$ och får:

$$k\left(-\frac{1}{3}\right) + l = -\frac{3a}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5+a}{10} = \frac{1}{2}$$

som visar att linjen går genom $(-1/3, 1/2)$ oavsett värde på a.

6. (a) Kurvan γ parametriseras enligt: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t\mathbf{j}$, $t \in [-2, 2]$. Därmed

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-2}^{2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_{-2}^{2} \left(\left(3t^2 \cdot t^2 + \frac{\sin t}{1+t^2} \right) \mathbf{i} - 2t(t^3 + e^{-t^2}) \mathbf{j} \right) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j}) dt \\ &= \int_{-2}^{2} (5t^4 + \frac{\sin t}{1+t^2} + 2te^{-t^2}) dt. \end{aligned}$$

Eftersom $\frac{\sin t}{1+t^2} + 2te^{-t^2}$ är en udda funktion, $\int_{-2}^{2} (\frac{\sin t}{1+t^2} + 2te^{-t^2}) dt = 0$ och därmed

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-2}^{2} 5t^4 dt = 5 \left[\frac{t^5}{5} \right]_{-2}^{2} = 64.$$

(b) Låt $P(x, y) = 3x^2y^2 + \frac{\sin x}{1+x^2}$, $Q(x, y) = 2y(x^3 + e^{-y^2})$. Vi har

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2 y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2 y.$$

Fältet $\mathbf{F}$ är en C^1-funktion i $\mathbb{R}^2$ och $P'_y = Q'_x$. Alltså är $\mathbf{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$.

(c) Låt C vara elipsbågen $2x^2 + 3y^2 = 20$ från $(-2, 2)$ till $(2, -2)$ medurs orienterad. Arbete som $\mathbf{F}$ uträttar beräknas enligt $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Eftersom $\mathbf{F}$ är konservativt kan kurvan C i integralen ersätts med enklare kurvan γ från (a):

$$\text{Arbetet} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 64.$$

7. Låt $f(x,y,z) = x + y + z$. Vårt problem består alltså i att visa att minimum av $f(x,y,z)$ under bivillkoret $xyz = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ är lika med 3 eller större. Låt $D = \{(x,y,z) : xyz = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Om vi betraktar f då (x,y,z) ligger i D och tillhör ett (stort) slutet klot kring origo har funktionen minimum i detta kompakta område, ty f är kontinuerlig. För bestämning av minimipunkten får vi enligt Lagranges multiplikatormetod systemet

$$\begin{cases} 1 &= \lambda yz \\ 1 &= \lambda xz \\ 1 &= \lambda xy \\ xyz &= 1 \end{cases}$$

(vi har $\text{grad}(f) = \lambda \text{grad}(g)$, med $g(x,y,z) = xyz$).

Ur första tre ekvationerna får vi $x = y = z$. Kombineras detta med den sista ekvationen erhålles punkten $x = y = z = 1$. Funktionens värde i denna punkt är $f(1,1,1) = 3$. Oberoende av klotet fick vi att f:s minimala värde i området är 3. Därmed blir $x + y + z \geq 3$ för alla x, y, z som uppfyller $xyz = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

8. (a) Vi gör ett motsägelsebevis och antar att egenvektorer $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ som svarar mot olika egenvärden λ_1 och λ_2 är linjärt beroende. Då en av dem , säg $\mathbf{v}_1$ är en multipel ev den andra, dvs $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2$ för något konstant c. Multiplicera både leden av likheten med matrisen A och får

$$A\mathbf{v}_1 = cA\mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \lambda_1\mathbf{v}_1 = c\lambda_2\mathbf{v}_2.$$

Å andra sidan genom att multiplicera samma likheten med λ_1 får vi

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 = c\lambda_1\mathbf{v}_2.$$

Ur detta följer att $c\lambda_2\mathbf{v}_2 = c\lambda_1\mathbf{v}_2$ och därmed $c(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_2 = 0$. Eftersom $\mathbf{v}_2 \neq 0$ som egenvektor och $\lambda_1 \neq \lambda_2$, så måste c vara noll och därmed $\mathbf{v}_1 = 0$ (obs! $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2$). Men detta är omöjligt ty $\mathbf{v}_1$är en egenvektor.

(b) Man kan argumentera på många olika sätt. T.ex. egenvärden är lösningar till den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ vilken är andragradsekvation i fall A är en 2×2 matris, och därmed har högst två olika lösningar.