MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2013-03-15 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Elin Solberg
tel. 0703-088304

TMV036/MVE350 Analys och Linjär Algebra K Kf Bt KI, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 12/13 inkluderas.)
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. (a) Låt $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + xy$. Ange en normal till nivåkurvan $f(x,y) = 7$ i punkten $(3,2)$. (2p)

(b) Beräkna $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ för $f(x,y,z) = x^3 \sin(yz) + (x^2+y^2)e^{x+z}$. (2p)

(c) Beräkna längden av parametriserade kurvan $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin t\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin t\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$. (2p)

(d) Hitta arean av den del av planet $2x + 3y + z = 1$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 = 1$. (3p)

2. (a) Definiera vad som menas med att reelvärd funktion $f(x,y)$ är differentierbar i (a,b). Förklara vad som menas med linjärisering för $f(x,y)$? (2p)

(b) Beräkna approximativt $(0.99 \cdot e^{0.2})^8$ genom att bestämma linjärisering av en lämplig funktion. (3p)

3. (a) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D (x^2+y^2)^{3/2} dA$$

där D är området som ges av $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, $x \le y$.

(b) Beräkna trippelintegralen (3p)

$$\iiint_K \frac{dV}{(2+x+y+z)^3}$$

där K är kroppen som begränsas av koordinatplanen och planet $x+y+z=2$, dvs $K = \{(x,y,z) : x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x+y+z \le 2\}$.

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & c \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm matrisens egenevärden. (2p)

(b) Undersök om det finns värden på c för vilka A är diagonaliserbar och ange för eventuella sådana c en matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$. (4p)

Var god vänd!

5. Vi ska bygga en rätvinklig låda utan lock. Lådan ska ha sidolängderna x, y och z. Själva stommen till lådan ska tillverkas av 12 tunna rör. Den totala längden rör vi ska använda är 56 meter. Bestäm x, y och z så att arean av lådans utsida (de fyra vägarna plus botten) ska bli största möjliga. (6p)

6. Låt $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \sin y - y)\mathbf{i} + (e^x \cos y - 1)\mathbf{j}$.

(a) Låt γ vara linjestycket från $(0, 0)$ till $(2, 0)$. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (2p)

(b) Med hjälp av Greens formel och resultat i (a) beräkna det arbete som $\mathbf{F}$ uträttar för att förflytta en partikel längs halvcirkeln $(x-1)^2+y^2 = 1$, $y \geq 0$, från $(2, 0)$ till $(0, 0)$. (3p)

(c) Är $\mathbf{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? Motivera väl. (1p)

7. Avgör om följande två gränsvärden existerar eller ej och bestäm i förekommande fall deras värde (tydlig motivering krävs!) (6p)

$$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4}, \qquad (b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

8. (a) Låt $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ vara parvis ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^n$. Visa att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ är en bas i $\mathbb{R}^n$. (3p)

(b) Antag att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ är en ortonormerad mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$. Visa att om $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ så är $\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \ldots + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$ och (3p)

$$||\mathbf{a}||^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + \ldots + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n)^2$$

Motivera väl.

Lycka till!
Lyudmila T

Lösningar

1. (a) En normal till nivåkurvan ges av grad$f(3,2)$. Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4y + x$$

och grad$f(3,2) = (8,-5)$.

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= x^3\cos(yz)y + (x^2+y^2)e^{x+z} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3\cos(yz)y + (x^2+y^2)e^{x+z}) \\
&= 3x^2 y\cos(yz) + 2xe^{x+z} + (x^2+y^2)e^{x+z} \\
&= 3x^2 y\cos(yz) + (x^2+2x+y^2)e^{x+z}
\end{aligned}$$

(c) Vi har $\mathbf{r}'(t) = -2\sin t\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos t\mathbf{k}$ och $||\mathbf{r}'(t)|| = (4\sin^2 t + 2\cos^2 t + 2\cos^2 t)^{1/2} = 2$. Därmed blir kurvans längd lika med $\int_0^{2\pi} ||\mathbf{r}'(t)||dt = 4\pi$.

(d) Ytan har följande parametrisering $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, 1-2u-3v)$, $(u,v) \in D = \{(u,v) : u^2+v^2 \le 1\}$. Vidare

$$\mathbf{r}'_u = (1,0,-2), \quad \mathbf{r}'_v = (0,1,-3) \text{ och } \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (2,3,1).$$

Ytans area blir alltså

$$S = \iint_D ||\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|| dA = \iint_D \sqrt{4+9+1}dA = \sqrt{14}(\text{arean av D}) = \sqrt{14}\pi.$$

2. (a) Se kursboken

(b) Betrakta linjäriseringen $L(x,y)$ av $f(x,y) = (xe^y)^8$ i $(1,0)$. Vi får $f'_x = 8x^7e^{8y}$, $f'_y = 8x^8e^{8y}$ och

$$L(x,y) = f(1,0) + f'_x(1,0)(x-1) + f'_y(1,0)(y-0) = 1 + 8(x-1) + 8y.$$

Detta ger att

$$(0.99 \cdot e^{0.2})^8 = f(0.99, 0.2) \approx L(0.99, 0.2) = 1 + 8(-0.01) + 8 \cdot 0.2 = 2.52.$$

3. (a) Vi går över till de polära koordinaterna $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Vårt nya integrationsområde blir rektangeln $E = \{(r,\varphi) : 1 \le r \le 2, \pi/4 \le \varphi \le 5\pi/4\}$ och vi får alltså

$$\iint_D (x^2+y^2)^{3/2} dA = \iint_E r^3 \cdot r dA = \int_1^2 (\int_{\pi/4}^{5\pi/4} r^4 d\varphi)dr = \pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^2 = \frac{31\pi}{5}.$$

(b) Projektionen av kroppen K på xy-planet är triangeln $T = \{(x,y) : x+y \le 2, x \ge 0, y \ge 0\}$. Trippelintegralen kan alltså beräknas enligt

$$
\begin{aligned}
\iiint_K \frac{dV}{(2+x+y+z)^3} &= \iint_T \left(\int_0^{2-x-y} \frac{dz}{(2+x+y+z)^3} \right) dxdy \\
&= \iint_T \left[-\frac{1}{2(2+x+y+z)^2} \right]_0^{2-x-y} dxdy \\
&= -\frac{1}{2} \iint_T \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{(2+x+y)^2} \right) dxdy \\
&= -\frac{1}{32}(\text{arean av } T) + \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \frac{1}{(2+x+y)^2} dy \right) dx \\
&= -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \int_0^2 \left[-\frac{1}{(2+x+y)} \right]_0^{2-x} dx \\
&= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(2+x)} \right) dx \\
&= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}x - \ln|2+x| \right]_0^2 = \frac{8\ln 2 - 5}{16}.
\end{aligned}
$$

Vid beräkningen av dubbelintegralen använder vi att T är ett y-enkelt område: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2-x$.

4. (a) Vi löser den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$
\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & c \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)((4-\lambda)(-\lambda)+3) = 0
$$

omm $\lambda = 1$ eller $\lambda = 3$. Matrisens egenvärde (oavset vad parameter c är) är $\lambda = 1$ och $\lambda = 3$.

(b) Vi bestämmer A:s egenevktorer. Egenvektorerna till $\lambda = 3$ bestäms ur ekvationen $(A - 3I)\mathbf{x} = 0$:

$$
A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & c \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & c+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

och alla lösningar till systemet ges av $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} c+3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Egenvektorerna till $\lambda = 1$ bestäms ur ekvationen $(A - I)\mathbf{x} = 0$:

$$
A - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & c \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & c+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Vi ser att om $c \neq -1$ har matrisen en icke pivot kolonn och egenrummet spänns upp av en egenvektor. Detta leder att för $c \neq -1$ finns det högst två linjärt oberoende egenvektorer för matrisen A och därmed blir A ej diagonaliserbar.

Om $c = -1$ så ges de samtliga egenevektorerna till $\lambda = 1$ av $\begin{bmatrix} t \\ -s \\ s \end{bmatrix} =$ $t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(t, s) \neq (0, 0)$. I detta fall finns det 3 linjärt oberoende egenvektor till A: t.ex.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

och $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Vi har $4x+4y+4z = 56$ och arean av lådans utsida ges av $A(x,y,z) = xy+2xz+2yz$. Det gäller att bestämma det största värdet av $A(x,y,z)$ under bivillkoren $x+y+z = 14$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Ur $x+y+z = 14$ får vi $z = 14-x-y$. Insättningen i $A(x,y,z)$ ger att arean blir

$$S(x,y) = xy + 2x(14-x-y) + 2y(14-x-y) = 28x + 28y - 2x^2 - 2y^2 - 3xy.$$

Problemmet reduceras till att bestämma största värde för funktionen $S(x,y)$ i området $\{(x,y) : x > 0, y > 0, 14-x-y > 0\}$ som är en öppen triangel. Låt D var triangeln med randen. En sats från kursen ger oss att $S(x,y)$ har ett största värde på D och det antas antingen i kritiska punkter i det inre av D eller på randen. Vi börjar med att betsämma kritiska punkter: $S'_x = 28-4x-3y = 0$ och $S'_y = 28-4y-3x = 0$. Systemet har en lösning $x = y = 4$ och $S(4,4) = 112$.

Vi undersöker sedan tre randbitarna:

$$R_1 : y = 0, 0 \le x \le 14; \quad R_2 : y = 14-x, 0 \le x \le 14 \text{ och } R_3 : x = 0, 0 \le y \le 14.$$

R_1 : $g_1(x) = f(x,0) = 28x - 2x^2$. Vi har $g_1'(x) = 28 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 7$. Den kritiska punkter ligger i intervallet $0 \le x \le 14$ och $g_1(7) = 98$. Funktionvärdena i ändpunkterna är $g_1(0) = g_1(14) = 0$. Därmed blir funktionens största värde på R_1 98.

Av symmetri skäll gäller detta även för randbiten R_3.

$R_2 : g_2(x) = f(x, 14-x) = 14x-x^2$. Vi har $g_2'(x) = 14-2x \Leftrightarrow x = 7$ och $g_2(7) = 49$. I ändpunkterna har vi $g_2(0) = g_2(14) = 0$.

Vi har alltså att funktionens största värde på det slutna området är 112 som antas i den inre punkten $(4,4)$. Detta blir även den största värde i den öppna triangeln.

Svar: Största arean är 112 då $x = y = 4$ och $z = 6$.

6. (a) γ parametriseras enligt: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$, $t \in [0,2]$. Därmed

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^2 \big(0\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}\big) \cdot (\mathbf{i} + 0\mathbf{j})dt = 0$$

(b) Låt C vara den postivt orienterade randen av halvcirkelskivan D: $(x-1)^2+y^2 \le 1$, $y \ge 0$. Enligt Greens formel

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y - 1) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y - y)\right) dA = \iint_D dA = \text{Arean } D = \pi/2.$$

Randen C består av kurvan γ från (a)-delen och moturs orienterad halvcirkeln σ: $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $y \ge 0$. Vi har alltså

$$\text{Arbetet} = \int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pi/2 - 0 = \pi/2.$$

(c) **F** är inte konservativt, ty kurvintegralen längs sluten kurvan C är inte noll.

7. (a) Vi ska se vad som händer med $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^4}$ när (x,y) närmar $(0,0)$ från olika håll: när (x,y) närmar sig origo längs x-axeln så är punkterna på formen $(x,0)$, och vi får

$$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2+0} = 1 \to 1;$$

när (x,y) närmar sig $(0,0)$ längs y-axeln, vi har punkter $(0,y)$ där y går mot 0 och

$$f(0,y) = \frac{0}{0+y^2} = 0 \to 0.$$

Detta visar att funktionen saknar gränsvärdet då $(x,y) \to (0,0)$.

(b) Låt $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Vi har

$$0 \le |f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \text{ då } (x,y) \to (0,0)$$

Detta visar att $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

8. (a) Se kursboken hur man visar att $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ är linjärt oberoende. n stycken linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$ bildar en bas i $\mathbb{R}^n$.

(b) Enligt (a) är $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ en bas i $\mathbb{R}^n$. Då om $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ så är $\mathbf{a} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ för några konstanter $c_1, \ldots, c_n$. Multiplicera skalärt både leden av likheten med $\mathbf{u}_k$ och får

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_k = c_k\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = c_k,$$

ty $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k = 0$ om $i \neq k$ och $\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = 1$.
Vi har alltså $\mathbf{a} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ med $c_k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_k$, $k = 1, \ldots, n$.
Den andra likheten följer ur: om $c_k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_k$ så är

$$\begin{aligned} ||\mathbf{a}||^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n) \cdot (c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n) \\ &= c_1^2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \ldots + c_n^2\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + \ldots + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n)^2. \end{aligned}$$

Vi använder igen att $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k = 0$ om $i \neq k$ och $\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = 1$